T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 29 mars 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

Dans tous les exercices, on note I l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle I.

1°) Recopier et compléter la phrase : « Les primitives de f sur I sont les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto$ …….. ».

………..

………..

2°) Aucune rédaction n'est demandée pour cette question.

• Déterminer l'expression de la primitive F_1 de f sur l'intervalle I telle que $\mathrm{F}_1\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$.

…………………………………… (une seule égalité)

• Déterminer l'expression de la primitive F_2 de f sur l'intervalle I telle que $\mathrm{F}_2\left(4+2\sqrt{3}\right)=2$.

…………………………………… (une seule égalité)

II. (4 points)

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x^3+x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

En observant que pour tout réel $x \neq 0$, on a $g(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^4+x^2}$, déterminer l'expression d'une primitive G de g sur l'intervalle I.

…………………………………… (une seule égalité)

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{x-1}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $h(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\times \mathrm{e}^{x}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$.

En déduire l'expression d'une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

…………………………………… (une seule égalité)

2°) Compléter les égalités de limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)=\ldots\ldots$ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\ldots\ldots$

Détailler la démarche dans l'espace ci-dessous.

IV. (2 points)

On admet qu'une primitive de la fonction $\varphi : x \mapsto x\ln x$ sur l'intervalle I est la fonction $\Phi : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}$.

On considère la fonction $\ell : x \mapsto x\ln\left(x^2\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer une primitive L de ℓ sur l'intervalle I.

………………………………………… (une seule égalité)

V. (4 points)

On considère la fonction $m : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $m(x)=\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.

En déduire l'expression d'une primitive M de m sur l'intervalle I.

…………………………………… (une seule égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 29-3-2024

Dans tous les exercices, on note I l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle I.

1°) Recopier et compléter la phrase : « Les primitives de f sur I sont les fonctions F : $x \mapsto$ …….. ».

Les primitives de f sur I sont les fonctions F : $x \mapsto 2\sqrt{x}+k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2°) Aucune rédaction n'est demandée pour cette question.

● Déterminer l'expression de la primitive F_1 de f sur l'intervalle I telle que $\mathrm{F}_1\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$.

$$\forall x \in I \quad \mathrm{F}_1(x)=2\sqrt{x}-1$$

On sait que les primitives de f sur I sont les fonctions F : $x \mapsto 2\sqrt{x}+k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On calcule $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ en fonction de k.

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}}+k$$

$$=2\times\frac{1}{2}+k$$

$$=1+k$$

On cherche k tel que $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4}\right)=0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1+k=0$

$\Leftrightarrow k=-1$

La primitive de f cherchée est donc la fonction $\mathrm{F}_1 : x \mapsto 2\sqrt{x}-1$.

● Déterminer l'expression de la primitive F_2 de f sur l'intervalle I telle que $F_2\left(4+2\sqrt{3}\right)=2$.

$$\forall x \in I \quad F_2(x)=2\sqrt{x}-2\sqrt{3}$$

On sait que les primitives de f sur I sont les fonctions $F : x \mapsto 2\sqrt{x}+k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On calcule $F\left(4+2\sqrt{3}\right)$ en fonction de k.

$F\left(4+2\sqrt{3}\right)=2\sqrt{4+2\sqrt{3}}+k$

$=2\times\left(\sqrt{3}+1\right)+k$ [La calculatrice Numworks simplifie $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ en $\sqrt{3}+1$. Sans calculatrice, il faut observer $\left(\sqrt{3}+1\right)^2=4+2\sqrt{3}$.]

On cherche k tel que $F\left(4+2\sqrt{3}\right)=2 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow 2\times\left(\sqrt{3}+1\right)+k=2$

$\Leftrightarrow k=-2\sqrt{3}$

La primitive de f cherchée est donc la fonction $F_2 : x \mapsto 2\sqrt{x}-2\sqrt{3}$.

II.

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x^3+x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

En observant que pour tout réel $x \neq 0$, on a $g(x)=\dfrac{2x^3+x}{x^4+x^2}$, déterminer l'expression d'une primitive G de g sur l'intervalle I.

$$\forall x \in I \quad G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^4+x^2\right)$$

Or $\forall x \in I \quad x^4+x^2>0$ (évident) donc $\left| x^4+x^2 \right| = x^4+x^2$.

Comme on doit donner une primitive, on peut rajouter n'importe quelle constante.

III.

On considère la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{x-1}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $h(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\times \mathrm{e}^{x}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$.

En déduire l'expression d'une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{H}(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)$$

On peut aussi écrire $\mathrm{H}(x)=\dfrac{\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)}{\mathrm{e}}$.

Comme on doit donner une primitive, on peut rajouter n'importe quelle constante.

2°) Compléter les égalités de limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

Détailler la démarche dans l'espace ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{X}=0\\ \lim\limits_{X\to 0}\cos X=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée, }\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit, }\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0.$$

On vérifie les deux limites grâce à la calculatrice.

IV.

On admet qu'une primitive de la fonction $\varphi : x\mapsto x\ln x$ sur l'intervalle I est la fonction $\Phi : x\mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}$.

On considère la fonction $\ell : x\mapsto x\ln\left(x^2\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer une primitive L de ℓ sur l'intervalle I.

$$\forall x\in I \quad \mathrm{L}(x)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}$$

$\forall x\in I \quad \ell(x)=2x\ln x$ soit $\forall x\in I \quad \ell(x)=2\varphi(x)$. On peut donc écrire $\ell=2\varphi$.

Une primitive de ℓ sur I est donc la fonction 2Φ.

Comme on doit donner une primitive, on peut rajouter n'importe quelle constante.

V.

On considère la fonction $m : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}^{*}$.

Vérifier au brouillon que pour tout réel x, on a $m(x) = \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.
En déduire l'expression d'une primitive M de m sur l'intervalle I.

$$\forall x \in I \quad \mathrm{M}(x) = -\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Or $\forall x \in I \quad 1-\mathrm{e}^{-x} > 0$ (il faut faire une petite étude pour le voir) donc $\forall x \in I \quad \left|1-\mathrm{e}^{-x}\right| = 1-\mathrm{e}^{-x}$.

Comme on doit donner une primitive, on peut rajouter n'importe quelle constante.