T spécialité

Contrôle du mardi 30 janvier 2024 (3 heures)

● L'usage de la calculatrice est autorisé.

● Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

I. (3 points)

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, etc. . Une suite de huit bits est appelée octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

2°) Déterminer la probabilité qu'au moins deux bits soient mal transmis dans l'octet lors de cette communication. On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B (1 point)

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet. On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

● la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;

● la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;

● si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;

● si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;

● si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs , la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :
E_0 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
E_1 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
E_2 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
A : « Le bit de parité est transmis sans erreur ».

Faire un arbre pondéré sur la copie.

Calculer la probabilité de l'événement A. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On veillera à la rédaction.

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère un jeu dans lequel le joueur dispose d'une urne contenant neuf boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 9.
Le joueur tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. Il note les numéros des deux boules dans l'ordre.
Il gagne si les numéros des deux boules tirées sont de même parité. Il perd dans le cas contraire.

1°) Quelle est la probabilité que le joueur soit gagnant ? On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2°) Recopier et compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu():` écrite dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu. On suppose que la fonction `randint` a préalablement été importée de la bibliothèque `random`.

```
def jeu():
    x,y=randint(1,9),randint(1, 9)
    if ……………………:
       print("gagné")
    else:
       print("perdu")
```

3°) Cette fois, le joueur tire successivement avec remise n boules dans l'urne, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il note les numéros des boules dans l'ordre.
Il gagne si tous les numéros des boules tirées sont de même parité. Il perd dans le cas contraire.
Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'il gagne au jeu.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$? Justifier.

III. (2 points : 1 point + 1 point)

Pour se rendre à son travail, Michel peut utiliser au choix le bus ou le train.
La probabilité que le bus soit en panne est égale à α.
La probabilité que le train soit en panne est égale à β.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

Recopier et compléter, sans justifier, les phrases suivantes :

- La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est donnée par $p_1 =$……….. .

- La probabilité p_2 que Michel puisse se rendre à son travail est donnée par $p_2 =$……….. .

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible en fonction de α et β.

IV. (9 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{D} = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Partie A (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$. On démontrera que $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

2°) En déduire le sens de variation de *f* sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-1\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$. On ne demande pas de faire le tableau de variations de *f*.

3°) On admet que l'équation $f(x) = x \quad (\text{E})$ admet deux solutions : 0 et un réel α strictement positif.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

Démontrer que l'intervalle $I = \left[\alpha\,;+\infty\right[$ est stable par *f*, c'est-à-dire que pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$.
Indication : On pourra utiliser le sens de variation de *f* sur *I*.

Partie B (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel *n*.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.

1°) Calculer u_1. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

2°) En utilisant la stabilité de l'intervalle *I* par *f* et la propriété rappelée en annexe, expliquer pourquoi tous les termes de la suite (u_n) sont dans *I*.

3°) Démontrer par récurrence, en rédigeant avec soin, que pour tout entier naturel *n*, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Indication : Pour l'hérédité, on utilisera le sens de variation de *f* sur *I*.

4°) À l'aide de résultats des questions précédentes, démontrer que la suite (u_n) converge. Citer le théorème utilisé.

5°) On note ℓ la limite de (u_n).

À l'aide de la propriété donnée sur la feuille annexe, écrire une égalité vérifiée par ℓ. En déduire ℓ.

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point))

On considère un cube ABCDEFGH (faire une figure soignée au brouillon).
On note :

- I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$;
- K le point d'intersection des droites (IJ) et (CD) ;
- L le centre de la face ABCD.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{DC}$. Expliquer.
Indication : On pourra s'intéresser au quadrilatère AIKC.

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KE}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

3°) Démontrer, sans calcul, que les vecteurs $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………..…………………………………

Note : ….. / 20

Cette feuille est à rendre dans la copie.

Merci de bien numéroter les copies ainsi que d'y inscrire nom et numéro sur chacune.

On veillera à soigner la présentation et la rédaction (résultats encadrés à la règle, une idée par ligne…).

Il est demandé de ne pas utiliser de symbole d'équivalence.

I	3 points		
II	3 points		
III	2 points		
IV	9 points		
V	3 points		

………

………

………

………

………

………

………

………

Feuille annexe

IV.

Partie B

2°)

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ stable par f ($f\left(D\right)\subset D$).

Pour tout réel $a \in D$, la suite $\left(u_n\right)$ définie par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ est définie sur $\mathbb{N}$. De plus, tous les termes de la suite appartiennent à D.

5°)

Propriété :

Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes sont strictement positifs.

Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ où ℓ est un réel strictement positif, alors $\ln u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln \ell$.

Corrigé du contrôle du 30-1-2024

I.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ... Une suite de huit bits est appelée octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1°) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

L'épreuve « transmettre un bit » est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à l'événement S : « Le bit est mal transmis » (succès) soit à son contraire $\overline{\text{S}}$ (échec).

D'après l'énoncé, la probabilité de S est égale à 0,01.

On répète l'épreuve 8 fois dans des conditions identiques indépendantes.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X compte le nombre de bits mal transmis dans l'octet.

X suit donc la loi binomiale de paramètres 8 (nombre de répétitions) et 0,01 (probabilité qu'un transmet bit soit mal transmis).

2°) Déterminer la probabilité qu'au moins deux bits soient mal transmis dans l'octet lors de cette communication. On donnera la valeur arrondie au millième.

On cherche $P\left(\text{X} \geqslant 2\right)$.

D'après la calculatrice, on a $P\left(\text{X} \geqslant 2\right) = 0,002690...$.

Affichage calculatrice : 0,002690078

Il s'agit d'un nombre décimal car la probabilité d'un succès est un nombre décimal. Avec la calculatrice, on ne peut pas obtenir tous les chiffres après la virgule.

La valeur arrondie au millième de cette probabilité est donc 0,003.

Pour avoir la valeur exacte de $P(\mathrm{X} \geqslant 2)$, on peut utiliser la calculatrice Python. Pour cela, on commence par écrire :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} \geqslant 2) &= 1 - P(\mathrm{X} < 2) \\ &= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 1) \\ &= 1 - \left[P(\mathrm{X} = 0) + P(\mathrm{X} = 1) \right] \\ &= 1 - \left[\binom{8}{0} \times 0{,}01^0 \times 0{,}99^8 + \binom{8}{1} \times 0{,}01^1 \times 0{,}99^7 \right] \\ &= 1 - \left(0{,}99^8 + 8 \times 0{,}01 \times 0{,}99^7 \right) \end{aligned}$$

On tape le calcul sur la console Python :

```
> 1-(0.99**8-8*0.01*0.99**7)
0.0026900777395207354
```

$P(\mathrm{X} \geqslant 2) = 0{,}0026900777395207354$ (valeur exacte)

On pourrait aussi écrire $P(\mathrm{X} \geqslant 2) = \sum_{k=2}^{k=8} P(\mathrm{X} = k)$ (écrture comme une somme).

La démarche est plus longue donc à éviter.

Partie B

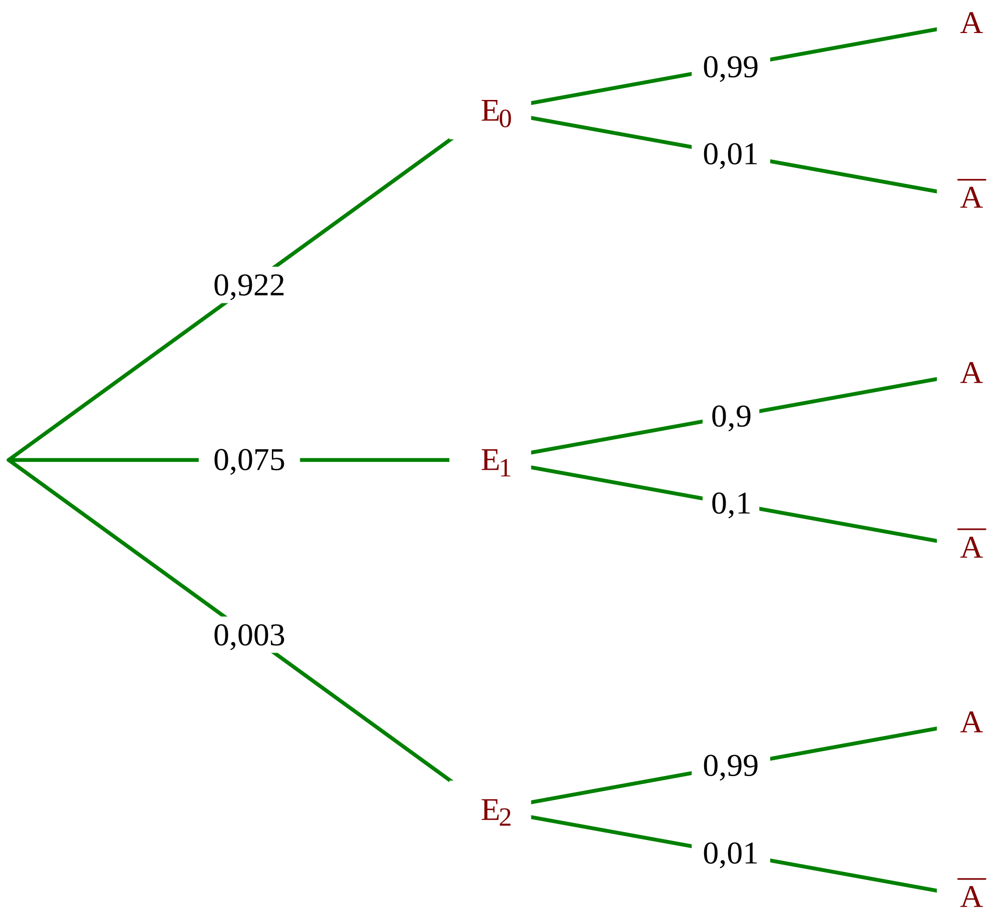
Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet. On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs , la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :
E_0 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
E_1 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
E_2 : « Les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
A : « Le bit de parité est transmis sans erreur ».

Faire un arbre pondéré sur la copie.

Calculer la probabilité de l'événement A. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.
On veillera à la rédaction.



$$P\left(E_2\right)=1-P\left(E_0\right)-P\left(E_1\right)$$

$$=1-0,922-0,075$$

$$=0,003$$

Le résultat est bien en accord avec celui de la question 2°) de la partie A.

On cherche $P\left(A\right)$.

Les événements E_0, E_1, E_2 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(A\right)=P\left(E_0\cap A\right)+P\left(E_1\cap A\right)+P\left(E_2\cap A\right)$$

$$=P\left(E_0\right)\times P\left(A/E_0\right)+P\left(E_1\right)\times P\left(A/E_1\right)+P\left(E_2\right)\times P\left(A/E_2\right)$$

$$=0,922\times 0,99+0,074\times 0,9+0,003\times 0,99$$

$$=0,98325$$

II.

On considère un jeu dans lequel le joueur dispose d'une urne contenant neuf boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 9.
Le joueur tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. Il note les numéros des deux boules dans l'ordre.
Il gagne si les numéros des deux boules tirées sont de même parité. Il perd dans le cas contraire.

1°) Quelle est la probabilité que le joueur soit gagnant ? On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Soit G l'événement : « Le joueur est gagnant ».

Pour un lancer, on note A l'événement : « La boule porte un numéro pair ».

G est la réunion des événements A-A (A suivi de A) et $\overline{\text{A}}\text{-}\overline{\text{A}}$.

Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles.

$$P(\text{G}) = P(\text{A-A}) + P\left(\overline{\text{A}}\text{-}\overline{\text{A}}\right)$$

$$= P(\text{A}) \times P(\text{A}) + P\left(\overline{\text{A}}\right) \times P\left(\overline{\text{A}}\right)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$= \frac{16}{81} + \frac{25}{81}$$

$$= \frac{41}{81}$$

2°) Recopier et compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu():` écrite dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu. . On suppose que la fonction `randint` a préalablement été importée de la bibliothèque `random`.

```
def jeu():
    x,y=randint(1,9),randint(1, 9)
    if x%2==y%2:
       print("gagné")
    else:
       print("perdu")
```

La fonction `jeu()` est une fonctions sans argument.

La condition `x%2==y%2` traduit que *x* et *y* ont le même reste dans la division euclidienne par 2.

Il y a une autre manière beaucoup plus longue (donc à éviter) :
`(x%2==0 and y%2==0) or (x%2==1 and y%2==1).`

3°) Cette fois, le joueur tire successivement avec remise n boules dans l'urne, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il note les numéros des boules dans l'ordre.
Il gagne si tous les numéros des boules tirées sont de même parité. Il perd dans le cas contraire.
Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'il gagne au jeu.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers + ∞ ? Justifier.

On reprend le même raisonnement qu'à la question 1°).

$$P(\text{G}) = P(\text{A-A-...-A}) + P(\overline{\text{A}}\text{-}\overline{\text{A}}\text{-...-}\overline{\text{A}})$$

$$= \underbrace{\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}\times\ldots\times\frac{4}{9}}+\underbrace{\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\ldots\times\frac{5}{9}}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n$$

On en déduit que $p_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n$.

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } -1<\frac{4}{9}<1 \\ \left(\frac{5}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } -1<\frac{5}{9}<1 \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une somme, } p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit q un réel.
On rappelle ci-dessous la règle concernant le comportement de la suite (q^n) lorsque n tend vers + ∞ suivant les valeurs de q.

- Si $-1<q<1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $q=1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Si $q>1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $q\leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers + ∞.

III.

Pour se rendre à son travail, Michel peut utiliser au choix le bus ou le train.
La probabilité que le bus soit en panne est égale à α.
La probabilité que le train soit en panne est égale à β.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

Recopier et compléter, sans justifier, les phrases suivantes :

• La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est donnée par $p_1 = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

• La probabilité p_2 que Michel puisse se rendre à son travail est donnée par $p_2 = 1 - \alpha\beta$.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible en fonction de α et β.

On appelle A l'événement : « Le bus est en panne » et B l'événement : « Le train est en panne ».

On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

• On cherche la probabilité que le bus ou le train soient en panne. Autrement dit, on cherche la probabilité de l'événement $\text{A}\cup\text{B}$.

Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante donc les événements A et B sont indépendants pour P.

On peut donc écrire $P(\text{A}\cap\text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B}) = \alpha\beta$.

$$p_1 = P(\text{A}\cup\text{B})$$

$$= P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A}\cap\text{B})$$

$$= \alpha + \beta - \alpha\beta$$

• On cherche la probabilité que Michel puisse se rendre à son travail.

Pour que Michel puisse se rendre à son travail, il ne faut pas que le bus et le train soient en panne en même temps.
Autrement dit, on cherche la probabilité de l'événement contraire de $\text{A}\cap\text{B}$, c'est-à-dire la probabilité de $\overline{\text{A}\cap\text{B}}$.

$$p_2 = P\left(\overline{\text{A}\cap\text{B}}\right)$$

$$= 1 - P(\text{A}\cap\text{B})$$

$$= 1 - \alpha\beta$$

On peut aussi utiliser la loi de De Morgan : $\overline{\text{A}\cap\text{B}} = \overline{\text{A}}\cup\overline{\text{B}}$. Cette méthode est cependant plus longue donc à éviter.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Partie A

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$. On démontrera que $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

Il est maladroit de transformer l'écriture de $f(x)$ suivant les valeurs de x (écriture sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$).

On pose $u(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

On calcule la dérivée de u.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad u'(x) = \dfrac{3\times(x+1)-(3x+1)\times 1}{(x+1)^2}$ (on applique la formule de dérivée d'un quotient)

$$= \frac{2}{(x+1)^2}$$

On peut aussi appliquer directement la formule de dérivation d'une fonction homographique.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2}$$

On sait que la dérivée de f est donnée par la formule $f' = \dfrac{u'}{u}$.

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{(x+1)^2}}{\dfrac{3x+1}{x+1}}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

2°) En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-1\right[$ et $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. On ne demande pas de faire le tableau de variations de f.

$\forall x \in \mathcal{D}\quad (x+1)(3x+1)>0$ donc $\forall x \in \mathcal{D}\quad f'(x)>0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-1\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

On vérifie grâce à la calculatrice en traçant la courbe représentative de f.

> Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.
> Soit $\mathcal{C}_1$ la partie de $\mathcal{C}$ pour $x>-\frac{1}{3}$ et $\mathcal{C}_2$ la partie de $\mathcal{C}$ pour $x<0$.
> On a $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$.
> $\mathcal{C}$ est en deux morceaux.

3°) On admet que l'équation $f(x)=x\quad(\text{E})$ admet deux solutions : 0 et un réel α strictement positif.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

On rentre l'équation $f(x)=x$, soit $\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)=x$.

La calculatrice donne l'affichage suivant :
x1=0
x2=0.5226616

On peut démontrer que α est un nombre irrationnel.

La valeur arrondie au millième de α est 0,523.

Démontrer que l'intervalle $I=\left[\alpha\,;+\infty\right[$ est stable par f, c'est-à-dire que pour tout réel $x\in I$, $f(x)\in I$.
Indication : On pourra utiliser le sens de variation de f sur I.

Il y a une seule méthode. On utilise le sens de variation de f. On peut pas procéder par inégalités successives.

Soit x un réel quelconque dans I.

On a $x\geqslant\alpha\quad(1)$.

On a démontré que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ donc, par restriction sur I (car I est inclus dans $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$).

(1) entraîne $f(x)\geqslant f(\alpha)$.

Or $f(\alpha)=\alpha$ car α est solution de (E).

On en déduit que $f(x) \geqslant \alpha$.

Ainsi pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. On en déduit que l'intervalle I est stable par f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.

> Il faut commencer par rentrer la suite dans la calculatrice. Cela permet d'avoir une idée de son comportement.
> La suite semble décroissante et converger.

1°) Calculer u_1. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

$u_1 = f(u_0)$

$= \ln\left(\dfrac{3\times 4+1}{4+1}\right)$

$= \ln\dfrac{13}{5}$ (on peut s'arrêter là ou écrire $u_1 = \ln 13 - \ln 5$)

Avec la calculatrice, on obtient : $u_1 = 0{,}9555114450...$.

La valeur arrondie au millième de u_1 est donc 0,956.

2°) En utilisant la stabilité de l'intervalle I par f et la propriété rappelée en annexe, expliquer pourquoi tous les termes de la suite (u_n) sont dans I.

$u_0 \in I$ et on a démontré dans la Partie A 3°) que l'intervalle $I = [\alpha\,; +\infty[$ est stable par f.

D'après la propriété rappelée en annexe, on peut affirmer que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I.

3°) Démontrer par récurrence, en rédigeant avec soin, que pour tout entier naturel *n*, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Indication : Pour l'hérédité, on utilisera le sens de variation de *f* sur *I*.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation :

Vérifions que la phrase $P(0)$ est vraie.
On a $u_0 = 4$ d'après la définition de la suite.
Par ailleurs, $u_1 = 0{,}9555114450...$
On a donc $u_1 \leqslant u_0$.

On en déduit que la phrase $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} \leqslant u_k$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

Puisque la phrase $P(k)$ est vraie, on a : $u_{k+1} \leqslant u_k$.

Or *f* est strictement croissante sur *I* et d'après la question 1°), les nombres u_k et u_{k+1} appartiennent à *I* donc $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$, soit $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$ (car, d'après la relation de récurrence, $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$).

Il n'y a pas de calculs.

Donc la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que la phrase $P(0)$ est vraie et que si la phrase $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors la phrase $P(k+1)$ est également vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

On aurait pu démontrer donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.

4°) À l'aide de résultats des questions précédentes, démontrer que la suite (u_n) converge. Citer le théorème utilisé.

On a démontré que tous les termes de la suite (u_n) sont dans *I*. On peut donc affirmer que tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à α.
On en déduit que la suite (u_n) est minorée par α.

D'après la question 3°), $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge (théorème du cours).

On en déduit que suite (u_n) converge.

5°) On note ℓ la limite de (u_n).

À l'aide de la propriété donnée sur la feuille annexe, écrire une égalité vérifiée par ℓ. En déduire ℓ.

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \begin{cases} \ell \\ \ln\left(\dfrac{3\ell+1}{\ell+1}\right) \quad \left(\text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{3u_n+1}{u_n+1}\right)\right) \end{cases}$$

Par unicité de la limite d'une suite, on a $\ell = \ln\left(\dfrac{3\ell+1}{\ell+1}\right)$, soit $\ell = f(\ell)$.

ℓ est donc solution de l'équation (E) donnée dans l'énoncé Partie A question 3°).

Par ailleurs, comme la suite (u_n) est minorée par α., on a $\ell \geqslant \alpha$ (propriété des inégalités pour les limites).

Or l'énoncé nous dit (Partie A question 3°) que l'équation (E) admet deux solutions : 0 et un réel α strictement positif.
On en déduit que $\ell = \alpha$.

La suite (u_n) converge vers α.

Ce résultat est en accord avec la conjecture émise grâce à la calculatrice.

On aurait aussi pu utiliser la propriété suivante.

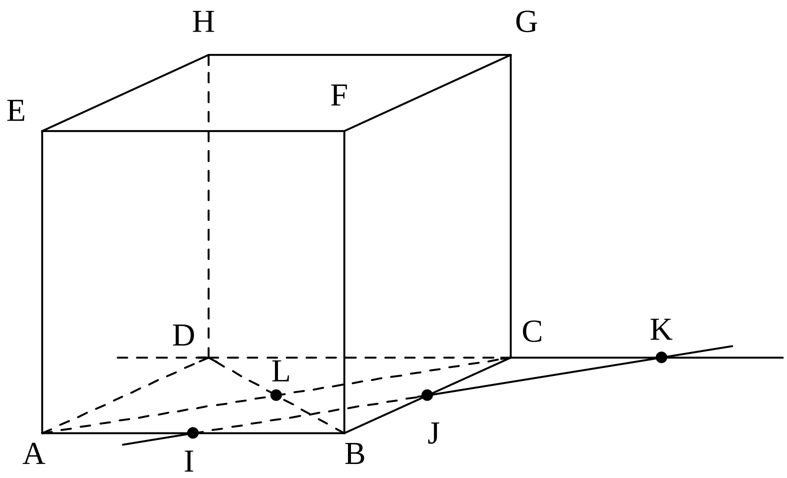
Soit f une fonction définie sur un intervalle I stable par f. Soit (u_n) une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. $\text{Si } \left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \\ \ell \in I \\ f \text{ est continue sur } I \end{array}\right\}$, alors $\ell = f(\ell)$.

La fonction f est bien continue sur son ensemble de définition.
La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc l'égalité $\ell = f(\ell)$.

V.

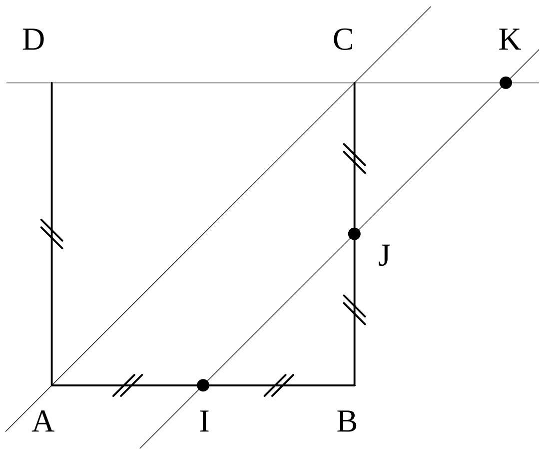
On considère un cube ABCDEFGH (faire une figure soignée au brouillon).
On note :

- I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$;
- K le point d'intersection des droites (IJ) et (CD) ;
- L le centre de la face ABCD.



1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{DC}$. Expliquer.
Indication : On pourra s'intéresser au quadrilatère AIKC.

On commence par faire une figure dans le plan de la face ABCD.



C'est l'exemple même de raisonnement dans l'espace. On fait des figures dans des plans de manière à raisonner aisément.

On démontre d'abord que le quadrilatère AIKC est un parallélogramme.

Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
On en déduit que (IJ) // (AC) (« droite des milieux »).

De plus, (AB) // (CD) car ABCD est un carré par hypothèse.

On a donc : (AI) // (CK) et (IK) // (AC).

On en déduit que le quadrilatère AIKC est un parallélogramme.

On peut donc écrire $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AI}$.

Or I est le milieu de $[AB]$. On a donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Finalement, on a $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (on utilise $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KE}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ (relation de Chasles)

$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

3°) Démontrer, sans calcul, que les vecteurs $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.

Il s'agit donc de savoir si les vecteurs $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires.

Or les points A, C, H, L sont coplanaires.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires.

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont coplanaires.