T exp

Interrogation écrite du vendredi 9 février 2024 (20 minutes)

Fiche

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………….

Note : ….. / 20

Dans les exercices **I** à **V**, le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (2 points)

On considère l'application f de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ avec $x' = ax + by$ et $y' = cx + dy$, où a, b, c, d sont des réels fixés.

Compléter par une matrice l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \text{..............} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

II. (3 points)

On considère l'application f de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ avec $x' = -\dfrac{x}{2}$ et $y' = -\dfrac{y}{2}$.

Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « f est ……………………… ».

………..

III. (3 points)

On considère l'application g de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ avec $x' = x + 1$ et $y' = y - 3$.

Quelle est la nature de g ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « g est ……………………… ».

………..

IV. (3 points)

On note A et B les points de *P* de coordonnées respectives $(2\,;3)$ et $(6\,;9)$.

Existe-t-il une homothétie *h* de centre O qui transforme A en B ? Répondre par oui ou non. ……

Si oui, préciser son rapport. ……

Justifier très brièvement les réponses précédentes sur la ligne ci-dessous (justification des deux réponses en même temps) :

………..

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On suppose que le plan *P* est orienté et que le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé direct.

On note C et D les points de *P* de coordonnées respectives $(0\,;4)$ et $(4\,;0)$.

1°) Quel est l'angle de la rotation *r* de centre O qui transforme C en D ? ………

Justifier sur les lignes ci-dessous :

………..

………..

2°) Soit M un point quelconque de *P* et M' son image par *r*.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Exprimer sans justifier x' et y' en fonction de *x* et *y*.

3°) Soit I le milieu de $[\mathrm{CD}]$. On note J son image par *r*.
Quelles sont les coordonnées de J ? ………

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Soit A et B deux points distincts du plan. On note C le symétrique de B par rapport à A et D le symétrique de A par rapport à B.

1°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme A en D ? ……

2°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme D en C ? ……

3°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en D ? ……

Indications données à l’oral

Exercice V : On donnera l’angle de la rotation en radian.

Exercices I à V :

- Attention aux articles définis ou indéfinis (le, la, un, une) dans la rédaction.

- Symbole d’équivalence interdit.

On attend des justifications en écriture mathématique.

Phrases de rédaction que j’aurais dû donner :

« … est l’homothétie de centre … et de rapport … . »

« … est la translation de vecteur … . »

« … est la symétrie de centre … . »

« … est la symétrie orthogonale d’axe … . »

Il s’agit de phrases-types.

Corrigé de l'interrogation écrite du 9-2-2024

Dans les exercices **I** à **V**, le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I.

On considère l'application f de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ avec $x' = ax + by$ et $y' = cx + dy$, où a, b, c, d sont des réels fixés.

Compléter par une matrice l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

II. (3 points)

On considère l'application f de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'\left(x'\,;\,y'\right)$ avec $x' = -\dfrac{x}{2}$ et $y' = -\dfrac{y}{2}$.

Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « f est ……………………….. ».

On peut aussi écrire : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x \\ y' = -\dfrac{1}{2}y \end{cases}$.

On reconnaît les expressions analytiques d'une homothétie de centre O.

f est l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

On notera l'utilisation de l'article défini « la ».

On peut écrire $f = h_{\left(\mathrm{O},\,-\frac{1}{2}\right)}$.

III.

On considère l'application g de P dans lui-même qui à tout point $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ fait correspondre le point $\mathrm{M}'(x'\,;\,y')$ avec $x' = x + 1$ et $y' = y - 3$.

Quelle est la nature de g ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On rédigera une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « g est ……………………….. ».

On reconnaît les expressions analytiques d'une translation.

g est la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;-3)$.

On notera l'utilisation de l'article défini « la ».
On peut écrire $g = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}(1\,;-3)$.

IV.

On note A et B les points de P de coordonnées respectives $(2\,;3)$ et $(6\,;9)$.

Existe-t-il une homothétie h de centre O qui transforme A en B ? Répondre par oui ou non. oui

Si oui, préciser son rapport. 3

Justifier très brièvement les réponses précédentes sur la ligne ci-dessous (justification des deux réponses en même temps) :

On a : $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ car $\begin{cases} 2 \times 3 = 6 \\ 3 \times 3 = 9 \end{cases}$.
Cette égalité vectorielle montre que B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

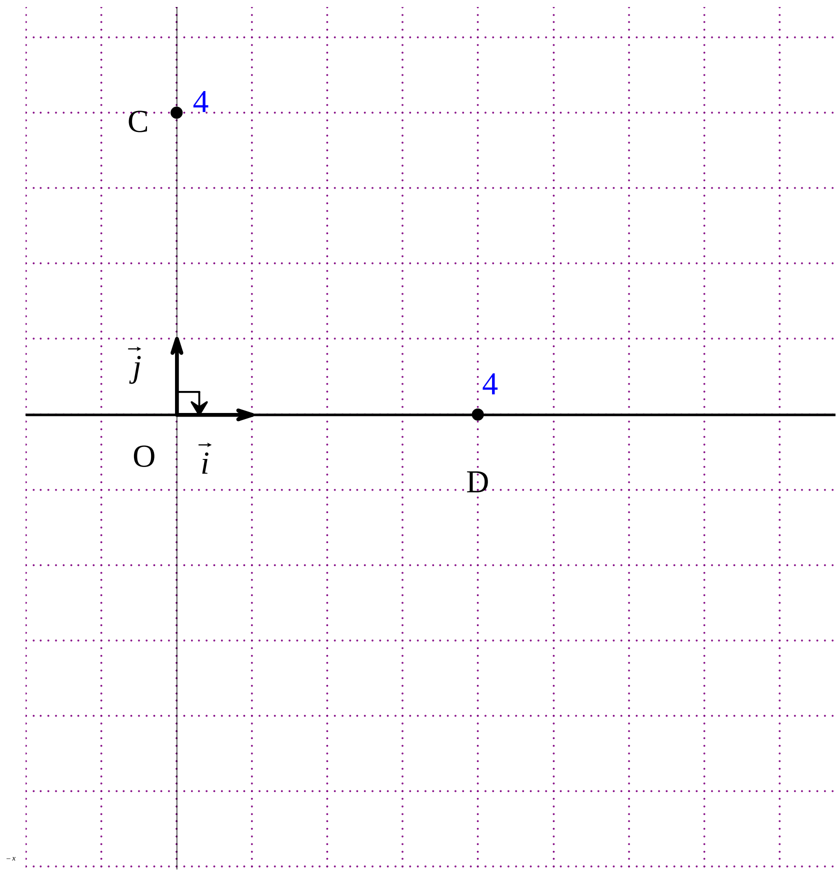
h est l'homothétie de centre O et de rapport 3. On peut écrire $h = h_{(\mathrm{O},\,3)}$.

V.

On suppose que le plan P est orienté et que le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est direct.
On note C et D les points de P de coordonnées respectives $(0\,;4)$ et $(4\,;0)$.

1°) Quel est l'angle de la rotation r de centre O qui transforme C en D ? $-\dfrac{\pi}{2}$

Justifier sur les lignes ci-dessous :



On a $\left.\begin{array}{l} OC = OD \\ \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{array}\right\}$ (2 conditions : l'une avec égalité de longueur, l'autre avec mesure d'angle orienté).

On en déduit que D est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Remarque :

$\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ dans cet ordre.

Il s'agit aussi de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OC)$ et $[OD)$ dans cet ordre.

Pour déterminer une mesure en radians, on peut considérer l'angle géométrique saillant associé $\widehat{COD}$.

Il s'agit d'un angle droit (mesure $\dfrac{\pi}{2}$).

On tient compte ensuite de l'orientation du plan : le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé direct donc $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $-\dfrac{\pi}{2}$ est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

On observera que le marquage de cet angle orienté sur cet angle orienté.

On peut aussi donner $\dfrac{3\pi}{2}$ pour mesure en radian de cet angle en radian. Cette mesure se visualise aisément sur le graphique grâce à l'angle géométrique rentrant associé.

r est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On peut écrire $r = R_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)}$.

r est le quart de tour indirect de centre O.

2°) Soit M un point quelconque de P et M' son image par r.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Exprimer sans justifier x' et y' en fonction de x et y.

Rappel :

On utilise l'expression analytique d'une rotation de centre O et d'angle θ.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par la rotation de centre O et d'angle θ.

On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.

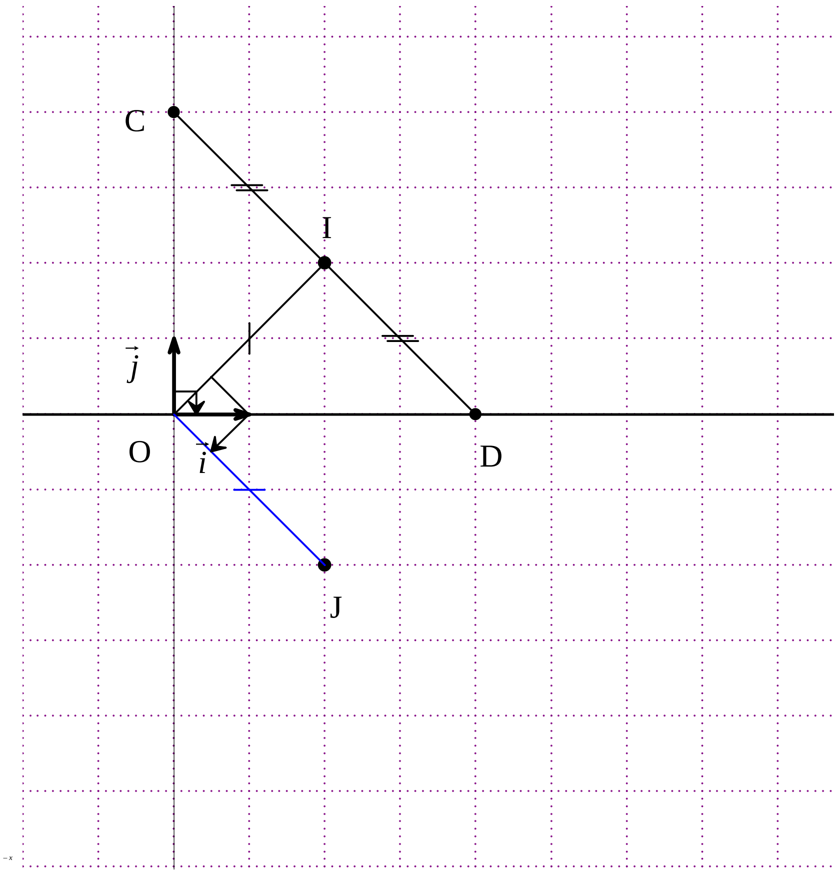
On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La matrice qui intervient est $\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ car $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ (utilisation du cercle trigonométrique par exemple).

On notera que les parenthèses sont obligatoires.

On en déduit que $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

3°) Soit I le milieu de $[\mathrm{CD}]$. On note J son image par r.
Quelles sont les coordonnées de J ? $\mathrm{J}(2\,;-2)$



On peut écrire $\mathrm{J} = r\left(\mathrm{I}\right)$ (J est l'image de I par r).

On applique les formules de calcul des coordonnées d'un milieu.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{C}} + x_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{C}} + y_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2 \end{cases}$$

On vérifie sur le graphique.

On applique les expressions analytiques de r.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{J}} = y_{\mathrm{I}} = 2 \\ y_{\mathrm{J}} = -\,x_{\mathrm{I}} = -\,2 \end{cases}$$

$\mathrm{J}\left(2\,;-2\right)$

On vérifie sur le graphique.

VI.

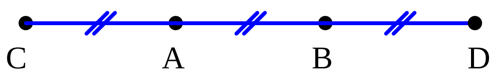
Soit A et B deux points distincts du plan. On note C le symétrique de B par rapport à A et D le symétrique de A par rapport à B.

1°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme A en D ? 3

2°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme D en C ? $-\dfrac{1}{2}$

3°) Quel est le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en D ? -2

Dans cet exercice, le plan n'est pas muni d'un repère. On fait donc une figure sans tracer de repère.



La justification découle d'égalités vectorielles :

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\,2\overrightarrow{\mathrm{BD}}$