T
spécialité

Interrogation écrite du vendredi 12 janvier 2024

Fiche

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$ pour tout entier naturel n.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ? On rencontre une forme indéterminée du type « ………... ».

On donne les formes suivantes de u_n, la première et la troisième étant valables pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Entourer la forme qui permet de lever l'indétermination.

$$u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right) \qquad u_n = \frac{1-3n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n} \qquad u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - 2\sqrt{n}\right)$$

Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞ en utilisant la forme choisie. On détaillera bien la démarche.

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5. On tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. On note les numéros des deux boules dans l'ordre.
On donnera les résultats sous forme décimale.

1°) Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ? …………

2°) Quelle est la probabilité que les deux numéros soient de même parité ? …………

3°) Quelle est la probabilité que l'un des deux numéros au moins soit pair ? …………

III. (10 points : 1°) 4 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points + 2 points)

Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de façon indépendante.
Lors des vaccinations précédentes, 20 % des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin.
On assimile la vaccination des 15 chiots de façon indépendante à une même épreuve aléatoire répétée 15 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de 15 chiots, associe le nombre de chiots qui ont eu une réaction forte à la suite de cette vaccination.

Compléter les pointillés dans la phrase suivante (premier « trou » à compléter par un mot, deuxième et troisième « trous » à compléter par des nombres ; la probabilité écrite sous forme décimale) :

X suit la loi …………………… de paramètres …….. (nombre de répétitions) et ……. (probabilité qu'un chiot fasse une réaction forte au vaccin).

1°) Le but de cette question est de calculer la probabilité de l'événement A : « 5 chiots exactement ont une forte réaction au vaccin ».

Compléter les lignes suivantes où P désigne la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire :

$P(\text{A}) = P(\text{X} = ...)$

$= ....$ (formule du cours en situation)

$= ....$

$= ....$

La valeur arrondie au millième de $P(\text{A})$ est …………… .

2°) Le but de cette question est de calculer la probabilité de l'événement B : « au moins 3 chiots ont une forte réaction au vaccin ».

Compléter les lignes suivantes :

$P(\text{B}) = P(\text{X} \; .... \; ....)$

$= ....$ (résultat obtenu avec la calculatrice)

La valeur arrondie au millième de $P(\text{B})$ est …………… .

3°) Compléter les phrases suivantes :

• L'espérance mathématique de X est égale à …. (valeur exacte, sans égalité).

• La variance de X est égale à …. (valeur exacte, sans égalité).

Écrire le détail des calculs dans les deux colonnes ci-dessous (à gauche, l'espérance ; à droite, la variance) :

………………………………………………………..	………………………………………………………..
………………………………………………………..	………………………………………………………..

Indications données à l'oral

II.

On tire successivement avec remise deux boules dans l'urne.

On tire une première boule. On note son numéro ; on la remet dans l'urne.

On tire une deuxième boule. On note son numéro ; on la remet dans l'urne.

On attend les résultats des probabilités sous forme décimale.

2°) « de même parité » : les deux numéros sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

III.

1°) et 2°)

Pour la dernière égalité, écrire chaque fois le maximum de chiffres possible d'après l'affichage de la calculatrice.

3°) Pour le calcul de l'espérance mathématique et de la variance de X, appliquer les formules en situation.

Corrigé de l'interrogation écrite du 12-1-2024

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.

Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ? On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

On utilise des guillemets car il s'agit d'une écriture symbolique qu'on n'a théoriquement pas le droit d'écrire (pas d'opérations avec des infinis).

On donne les formes suivantes de u_n, la première et la troisième étant valables pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Entourer la forme qui permet de lever l'indétermination.

$$u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2\right) \qquad u_n = \frac{1-3n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n} \qquad u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - 2\sqrt{n}\right)$$

Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞ en utilisant la forme choisie. On détaillera bien la démarche.

On va utiliser la limite d'un produit.

On applique les propriétés d'opérations algébriques et la limite de la racine carrée d'une suite.

On part de $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (limite de référence).

On a donc $1+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

On peut en déduire que $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{1}$, soit $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

On obtient ensuite $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1-2$, soit $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$.

$$\left.\begin{array}{l} n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1 \end{array}\right\} \text{ donc, par limite d'un produit, } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty.$$

La suite (u_n) converge vers – ∞.

On ne peut pas utiliser les deux autres formes car elles donnent des formes indéterminées.

On peut avoir une idée du résultat grâce à la calculatrice.

II.

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5. On tire successivement avec remise deux boules dans l'urne. On note les numéros des deux boules dans l'ordre.
On donnera les résultats sous forme décimale.

1°) Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ? 0,16

2°) Quelle est la probabilité que les deux numéros soient de même parité ? 0,52

3°) Quelle est la probabilité que l'un des deux numéros au moins soit pair ? 0,64

On peut faire un arbre de possibilités ou mieux, faire un arbre de probabilités avec l'événement A : « obtenir un numéro pair » pour un tirage et son contraire.

La probabilité de A est égale à $\frac{2}{5}=0,4$ (on adopte le modèle d'équiprobabilité).

III.

Dans un chenil, on vaccine 15 chiots de façon indépendante.
Lors des vaccinations précédentes, 20 % des chiots ont présenté une forte réaction au vaccin.
On assimile la vaccination des 15 chiots de façon indépendante à une même épreuve aléatoire répétée 15 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Soit X la variable aléatoire qui, à un groupe de 15 chiots, associe le nombre de chiots qui ont eu une réaction forte à la suite de cette vaccination.

Compléter les pointillés dans la phrase suivante (premier « trou » à compléter par un mot, deuxième et troisième « trous » à compléter par des nombres ; la probabilité écrite sous forme décimale) :

X suit la loi binomiale de paramètres 15 (nombre de répétitions) et 0,2 (probabilité qu'un chiot fasse une réaction forte au vaccin).

1°) Le but de cette question est de calculer la probabilité de l'événement A : « 5 chiots exactement ont une forte réaction au vaccin ».

Compléter les lignes suivantes où *P* désigne la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire :

$P(\text{A})=P(\text{X}=5)$

$=\binom{15}{5}\times 0,2^5\times 0,8^{10}$ (formule du cours en situation)

$=3003\times 0,2^5\times 0,8^{10}$ (calcul du coefficient binomial à l'aide de la calculatrice ou à la main)

$=0,103182294319...$ (petits points indispensables)

La valeur arrondie au millième de $P(\text{A})$ est 0,103.

$P(\text{A})$ est un nombre décimal.
Avec la calculatrice, on ne peut pas obtenir tous les chiffres après la virgule.

Pour avoir la valeur exacte de $P(\mathrm{A})$, on peut utiliser la calculatrice Python.

On obtient l'affichage : 0,103182294319104. C'est la valeur exacte de $P(\mathrm{A})$.

On peut donc écrire : $P(\mathrm{A}) = 0{,}103182294319104$.

2°) Le but de cette question est de calculer la probabilité de l'événement B : « au moins 3 chiots ont une forte réaction au vaccin ».

Compléter les lignes suivantes :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{X} \geqslant 3)$$

$$= 0{,}6019767907450... \quad \text{(résultat obtenu avec la calculatrice)}$$

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{B})$ est 0,602.

$P(\mathrm{B})$ est un nombre décimal.
Avec la calculatrice, on ne peut pas obtenir tous les chiffres après la virgule.

Pour avoir la valeur exacte de $P(\mathrm{B})$, on peut utiliser la calculatrice Python. Pour cela, on commence par écrire :

$$P(\mathrm{B}) = 1 - \left[P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2)\right]$$

$$= 1 - \left[\binom{15}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^{15} + \binom{15}{1} \times 0{,}2^1 \times 0{,}8^{14} + \binom{15}{2} \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{13}\right]$$

$$= 1 - \left(0{,}8^{15} + 15 \times 0{,}2 \times 0{,}8^{14} + 105 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^{13}\right)$$

On tape : 1-(0.8**15+15*0.2*0.8**14+105*0.2**2*0.8**13) .

On obtient l'affichage : 0.6019767907450877. C'est la valeur exacte de $P(\mathrm{B})$.

On peut donc écrire : $P(\mathrm{B}) = 0{,}019767907450877$.

3°) Compléter les phrases suivantes :

● L'espérance mathématique de X est égale à 3 (valeur exacte, sans égalité).

● La variance de X est égale à la 2,4 (valeur exacte, sans égalité).

Écrire le détail des calculs dans les deux colonnes ci-dessous (à gauche, l'espérance ; à droite, la variance) :

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 15 \times 0{,}2$	$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 15 \times 0{,}2 \times 0{,}8$
$= 3$	$= 2{,}4$