T spécialité

Devoir pour le jeudi 11 janvier 2024

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x+\ln(2x)+\ln(4x)<0$.

II. Démontrer que pour tout réel x, les réels $a=\left(x^2+2x-1\right)^2$, $b=\left(x^2+1\right)^2$, $c=\left(x^2-2x-1\right)^2$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

III. Écrire une fonction Python d'en-tête `def test_arithm(a,b,c) :` qui prend en arguments trois réels a, b, c et qui renvoie `True` s'ils forment, dans un certain ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et `False` dans le cas contraire.

Consigne : Écrire la fonction dans un cadre bien centré en respectant la syntaxe et les indentations.

Réaliser le programme et le tester pour différentes valeurs de a, b, c.

Corrigé du devoir pour le 11-1-2024

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x + \ln(2x) + \ln(4x) < 0$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x + \ln(2x) + \ln(4x) < 0 \quad (1)$.

Pour qu'un réel x soit solution de (1), il est nécessaire qu'il vérifie le système de conditions suivant : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \\ 4x > 0 \end{cases}$

(existence des logarithmes népériens dans le premier membre de l'inéquation).

Ce système est équivalent au système $\begin{cases} x > 0 \\ x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$, qui se réduit à $x > 0$.

On résout (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il y a plusieurs méthodes.

méthode

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln\left(8x^3\right) < 0 \\
&\Leftrightarrow 8x^3 < 1 \\
&\Leftrightarrow x^3 < \frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow x < \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\
&\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln x + \ln 2 + \ln x + \ln 4 + \ln x < 0 \\
&\Leftrightarrow 3\ln x + \ln 2 + 2\ln 2 < 0 \\
&\Leftrightarrow 3\ln x + 3\ln 2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x + \ln 2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x < -\ln 2 \\
&\Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble de solutions de (1).

On a : $S = \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.

On vérifie avec le site dcode ou en traçant la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln x + \ln(2x) + \ln(4x)$.

II. Démontrer que pour tout réel x, les réels $a = \left(x^2 + 2x - 1\right)^2$, $b = \left(x^2 + 1\right)^2$, $c = \left(x^2 - 2x - 1\right)^2$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On a deux types de conditions nécessaires et suffisantes pour que 3 réels soient 3 termes consécutifs d'une suite connaît arithmétique (on parle de progression arithmétique).

Soit a, b, c trois réels.

CNS pour que a, b, c soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique :

1^er^ type :

Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = b + r$.

Il existe un réel r tel que $a = b - r$ et $c = b + r$.

Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = a + 2r$.

2^e^ type :

On peut se référer aux images mentales liées aux termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$b - a = c - b$
$2b = a + c$
$b = \dfrac{a+c}{2}$ (le nombre du « milieu » est la moyenne arithmétique des 2 autres)

On va utiliser l'égalité $2b = a + c$ (plus simple pour les calculs).

On n'introduit pas de suite (u_n).

On commence sèchement, sans explication.

On peut procéder par différence.

On applique l'identité remarquable suivante pour le carré d'une somme de trois termes valable pour tout triplet (a, b, c) de réels :

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$$

La démonstration consiste à écrire $\left(a+b+c\right)^2=\left(a+b+c\right)\left(a+b+c\right)$ puis à développer et à réduire l'expression.

Cette identité doit être sue par cœur.

On apprend cette identité mais pas $\left(a-b+c\right)^2$ ou $\left(a-b-c\right)^2$ etc.

$$b-a=\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(x^4+4x^3+2x^2-4x+1\right)$$

$$=4x-4x^3$$

$$c-b=\left(x^4-4x^3+2x^2+4x+1\right)-\left(x^4+2x^2+1\right)$$

$$=4x-4x^3$$

On constate que $c-b=b-a$.

On en déduit que pour tout réel *x*, *a*, *b*, *c* sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Variantes :

On peut aussi appliquer l'identité remarquable x^2-y^2 pour factoriser les expressions $b-a$ et $c-b$.

On peut calculer $a+c$ et vérifier que $a+c=2b$.

III. Écrire une fonction Python d'en-tête `def test_arithm(a,b,c) :` qui prend en arguments trois réels *a*, *b*, *c* et qui renvoie `True` s'ils forment, dans un certain ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et `False` dans le cas contraire.

Consigne : Écrire la fonction dans un cadre bien centré en respectant la syntaxe et les indentations.

Réaliser le programme et le tester pour différentes valeurs de *a*, *b*, *c*.

Version booléenne :

```
def test_arithm(a, b, c) :
   liste_nombres=[a, b, c]
   liste_nombres.sort()
   return liste_nombres[1]-liste_nombres[0] == liste_nombres[2]-liste_nombres[1]
```

```
def test_arithm(a,b,c) :
    if a>b:
       r=b
       b=a
       a=r
    if c<b:
       r=c
       c=b
       b=r
    if a>b:
       r=b
       b=a
       a=r
    return b-a==c-b
```

Autres propositions:

Programme Carl-Johan Maurin

```
def test_arithm(a, b, c) :
liste_nombres=[a, b, c]
liste_nombres.sort()
return liste_nombres[1]-liste_nombres[0] == liste_nombres[2]-liste_nombres[1]
```

On utilise sort() dans Python pour trier dans l'ordre croissant les nombres dans une liste. Cela nous permet de ne faire qu'une vérification.

On teste le programme avec des valeurs tests.
$a=3$, $b=7$, $c=5$ Le programme renvoie True.
$a=4$, $b=7$, $c=8$ Le programme renvoie False.

Programme Alexandre Viallard

```
def test_arithm(a,b,c) :
    if a>b:
       r=b
       b=a
       a=r
    if c<b:
       r=c
       c=b
       b=r
    if a>b:
     r=b
     b=a
     a=r
return b-a==c-b
```

Le code réarrange les valeurs de façon croissante.

On aurait pu proposer un script sans écrire de fonction.

```
a=float(input('Entrer le 1er nombre :'))
b=float(input('Entrer le 2e nombre :'))
c=float(input('Entrer le 3e nombre :'))
…
```