T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 8 décembre 2023

Fiche

20 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………. **Note : ….. / 20**

I. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞.
Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ?

On rencontre une forme indéterminée du type « ….. ».

On admet que u_n peut s'écrire sous l'une des formes ci-dessous. On précise que la troisième forme est valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$

Entourer les formes qui permettent de lever l'indétermination puis déterminer la limite de u_n lorsque *n* tend vers + ∞.

………..

………..

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-u_n} + 1}$ pour tout entier naturel *n*. On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.
On admet que pour tout entier naturel *n* on a $u_n \leqslant 1$ et que la suite (u_n) est croissante.

1°) Justifier que la suite (u_n) converge. Citer le théorème utilisé.

………..

………..

………..

2°) On note l la limite de (u_n).
Écrire une égalité vérifiée par l.

……….………….

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de l. ………..

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sqrt{k}$.

La fonction Python `terme(n)` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel n.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie S_n.
On suppose avoir préalablement importé la fonction « racine carrée » `sqrt` du module `math`
(`from math import sqrt`).

```
def terme(n):
    s=0
    for k in range(……..):

          ………………

    return s
```

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k}$.

1°) Pour $n=1$, on a : $S_1 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Quelle est la valeur exacte de S_2 ? Écrire le calcul sur la ligne ci-dessous. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

……..

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de S_{50}. ………

3°) On admet que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left| S_n - \ln 2 \right| \leqslant 0,05$. ……

Corrigé de l'interrogation écrite du 8-12-2023

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.
Quelle forme indéterminée rencontre-t-on ?

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On utilise des guillemets car il s'agit d'une écriture symbolique qu'on n'a théoriquement pas le droit d'écrire (pas d'opérations avec des infinis).

On admet que u_n peut s'écrire sous l'une des formes ci-dessous. On précise que la troisième forme est valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

$u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$

Entourer les formes qui permettent de lever l'indétermination puis déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers + ∞.

$n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $-\dfrac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On obtient immédiatement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On peut aussi utiliser la 3$^{\text{e}}$ forme (même démarche).

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-u_n}+1}$ pour tout entier naturel n. On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de n.
On admet que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 1$ et que la suite (u_n) est croissante.

1°) Justifier que la suite (u_n) converge. Citer le théorème utilisé.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 1$, on peut affirmer que la suite (u_n) est majorée (par 1).

De plus, la suite (u_n) est croissante.

Or toute suite croissante majorée converge (théorème du cours sur la convergence des suites monotones).

On en déduit que la suite (u_n) converge.

2°) On note ℓ la limite de (u_n).
Écrire une égalité vérifiée par ℓ.

$$\ell = \frac{1}{e^{-\ell}+1}$$

Il s'agit de l'égalité obtenue à partir de la relation de récurrence par passage à la limite.

Pour justifier correctement, il faut dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} =$

- ℓ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (la suite (u_n) converge vers ℓ) et les termes de la suite (u_{n+1}) sont les mêmes que ceux de la suite (u_n) à l'exception du premier terme).
- $\dfrac{1}{e^{-\ell}+1}$ car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{e^{-u_n}+1}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de ℓ. 0,659

On effectue une résolution approchée de l'équation $x = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$ à l'aide de la calculatrice (on notera qu'il est inutile de transformer cette équation avant la résolution).
On obtient $\ell = 0,659046\ldots$.

III.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt{k}$.

La fonction Python `terme(n)` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel *n*.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie S_n.
On suppose avoir préalablement importé la fonction « racine carrée » `sqrt` du module `math`
(`from math import sqrt`).

```
def terme(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s=s+sqrt(k)
    return s
```

On peut aussi écrire `s+=sqrt(k)`.

On ne peut pas donner une formule simplifiée de S_n en fonction de *n* car il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. Il ne s'agit pas non plus d'une somme télescopique.

IV.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k}$.

On ne peut pas donner une formule simplifiée de S_n en fonction de n car il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. Il ne s'agit pas non plus d'une somme télescopique.

1°) Pour $n=1$, on a : $S_1 = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Quelle est la valeur exacte de S_2 ? Écrire le calcul sur la ligne ci-dessous. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

$$S_2 = \sum_{k=2}^{k=4} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

On vérifie à l'aide de la calculatrice.

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de S_{50}. 0,708

$$S_{50} = \sum_{k=50}^{k=100} \frac{1}{k}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $S_{50} = 0,708172179\ldots$.

3°) On admet que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left| S_n - \ln 2 \right| \leqslant 0,05$. 16

On procède par essais successifs.

Avec la calculatrice, on obtient : $\left| S_{16} - \ln 2 \right| = 0,0471190216\ldots$.

On pourrait éventuellement utiliser un programme Python.