T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 1er décembre 2023

Fiche

30 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère l'équation différentielle $2y'+y=0 \quad (\mathrm{E})$.

Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. ……………………………………..

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

II. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=1-n^2$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ ……… .

Quel est le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \leqslant -3999$? ………. (une seule égalité)

III. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=4^n-2^n$ pour tout entier naturel *n*.

Vérifier que $u_n=2^n\left(2^n-1\right)$ pour tout entier naturel *n*.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Compléter : $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ …. car ………… $\left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots \end{array}\right\}$ donc par limite d'un ………, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ ….

IV. (3 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier naturel *n* non nul.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (6 points : 1°) 1 point + 2 points ; 2°) 1 point + 2 points)

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$ pour tout entier naturel *n*.

Vérifier que $u_n = \left(\sqrt{2} - 1\right) \times \sqrt{n}$ pour tout entier naturel *n*.

………..

………..

En déduire la limite de la suite (u_n).

………..

………..

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{2n} + (-1)^n \sqrt{n}$ pour tout entier naturel *n*.

Comparer u_n et v_n pour *n* entier naturel quelconque. En déduire la limite de la suite (v_n).

………..

………..

………..

………..

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{{u_n}^2 + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que (u_n) converge vers 0.

La fonction Python d'en-tête `def seuil(a):` donnée dans l'encadré ci-contre prend pour argument un réel *a* et a pour objectif de renvoyer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \leqslant a$.

Compléter les pointillés (2 endroits).

```
def seuil(a):
    u=1
    n=0
    while ……….. :

       ………………………

       n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'interrogation écrite du 1-12-2023

I.

On considère l'équation différentielle $2y'+y=0 \quad (\mathrm{E})$.

Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. $\qquad f(x)=2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$

On attend uniquement l'expression sans détailler la démarche.

(E) est équivalente à l'équation $y'=-\dfrac{1}{2}y$. On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-\dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \quad (k\in\mathbb{R})$.

On cherche *k* tel que $f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

$$\Leftrightarrow k\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

$$\Leftrightarrow k\frac{1}{\cancel{\sqrt{\mathrm{e}}}}=\frac{2}{\cancel{\sqrt{\mathrm{e}}}}$$

$$\Leftrightarrow k=2$$

La solution cherchée est la fonction $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=1-n^2$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Quel est le plus petit entier naturel N tel que si $n\geqslant N$, alors $u_n\leqslant -3999$? $\qquad \mathrm{N}=64$ (une seule égalité)

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \leqslant -3999 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 1-n^2 \leqslant -3999\\ &\Leftrightarrow n^2 \geqslant 4000\\ &\Leftrightarrow n \geqslant \sqrt{4000} \quad \text{(les deux membres sont positifs)}\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $\sqrt{4000} = 63,245...$.
L'entier N cherché est donc 64 (entier immédiatement supérieur).

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4^n - 2^n$ pour tout entier naturel n.

Vérifier que $u_n = 2^n\left(2^n - 1\right)$ pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n \times 2^n - 2^n$$

$$= 2^n \times \left(2^n - 1\right) \quad \text{(factorisation)}$$

Compléter : $2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $2 > 1$. $\left.\begin{array}{l} 2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \\ 2^n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

On rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » d'où l'intérêt de la factorisation.

IV.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier naturel n non nul.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc, d'après le théorème des gendarmes, } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

V.

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$ pour tout entier naturel n.

Vérifier que $u_n = \left(\sqrt{2} - 1\right) \times \sqrt{n}$ pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{2} \times \sqrt{n} - \sqrt{n}$$

$$= \left(\sqrt{2} - 1\right) \times \sqrt{n} \quad \text{(factorisation)}$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

$$\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \sqrt{2}-1>0 \text{ donc } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\sqrt{2n}+(-1)^n\sqrt{n}$ pour tout entier naturel *n*.
Comparer u_n et v_n pour *n* entier naturel quelconque. En déduire la limite de la suite (v_n).

On procède par inégalités successives.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N} \quad (-1)^n \geqslant -1$.

On multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par $\sqrt{n}$ qui est un réel positif ou nul.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad (-1)^n\sqrt{n} \geqslant -\sqrt{n}$ (le sens de l'inégalité est conservé)

On ajoute $\sqrt{2n}$ aux deux membres de l'inégalité précédente.

On obtient $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n \geqslant u_n$.

On a démontré au 1°) que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Par comparaison (théorème du cours), on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

On n'a pas besoin de majorer u_n.

Une autre méthode non faite ici consisterait à considérer la sous-suites des termes d'indices pairs et impairs.

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{{u_n}^2+1}$ pour tout entier naturel *n*.
On admet que (u_n) converge vers 0.
La fonction Python d'en-tête `def seuil(a):` donnée dans l'encadré ci-contre prend pour argument un réel *a* et a pour objectif de renvoyer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \leqslant a$.
Compléter les pointillés (2 endroits).

```
def seuil(a):
    u=1
    n=0
    while u > a:
       u=u/(u**2+1)
       n=n+1
    return n
```

On teste ce programme sur la calculatrice.