T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 6 octobre 2023

fiche

50 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (8 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.
On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 2°) sur les lignes en bas de cette page.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f'(x) = (2x+1)e^{2x}$.

En déduire, sans calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto 2xe^{2x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{xe^{2x}}{2}$, $f_3 : x \mapsto 4 - 3xe^{2x}$.

On donnera les résultats sous forme factorisée.

……………………………………	……………………………………	……………………………………

2°) Démontrer que $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2e}$ (élèves portant un numéro pair) et que $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$ (élèves portant un numéro impair).

3°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times f(-x) = \ldots\ldots\ldots$ (résultat sous la forme la plus simple possible)

4°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-contre prend pour argument un réel x.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de x par f.
On suppose avoir importé préalablement la bibliothèque `math`.

```
def image(x):
    y=…………………….
    return y
```

1°) ….………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………

2°) ….………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………
…………………………………………………..……………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x+1)^3}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Compléter directement l'égalité ci-contre. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 3$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Quel est le coefficient directeur de T ? On donnera la valeur exacte sous forme fractionnaire. ……

3°) On pose $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2023)$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de S. …………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel a on associe la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^{\left(a\mathrm{e}^x\right)}$.
Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f_a'(x) = a\mathrm{e}^{\left(x + a\mathrm{e}^x\right)}$. On fera apparaître la formule utilisée.

……...

……...

2°) Déterminer a tel que $f_a(\ln 2) = 3$. …….. (une seule égalité)

IV. (2 points)

Compléter la propriété (P) suivante où a et b sont des réels quelconques : « Si $a < b$, alors e^a .... e^b ».

Comparer les nombres $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2023}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-2024}$. Justifier sur la ligne ci-dessous. A .... B

……...

V. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques
$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. On donne également les points $\mathrm{A}(2\,;4)$ et $\mathrm{B}(10\,;-2)$.
Tracer D sur l'écran de la calculatrice.
Les droites D et (AB) sont-elles parallèles ? Justifier brièvement.

……...

……...

……...

Indications données à l'oral

I. 1°) et 2°) ; **III.** 1°)

Commencer les calculs sèchement.

Inutile d'écrire $f(x) = \dots$ avant de commencer les calculs de dérivées.

IV.

Comparer les nombres $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2023}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-2024}$.

On demande de dire si $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ ou $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

V. Répondre sans utiliser de système d'équations paramétriques de (AB).

On fera très attention à la rédaction et aux notations (notation de la droite (AB) avec des parenthèses).

Corrigé de l'interrogation écrite du 6-10-2023

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.
On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 2°) sur les lignes en bas de cette page.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f'(x)=(2x+1)e^{2x}$.

f est une dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1\times e^{2x} + x\times 2e^{2x}$$

$$= e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$= (2x+1)e^{2x}$$

En déduire, sans calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto 2xe^{2x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{xe^{2x}}{2}$, $f_3 : x \mapsto 4-3xe^{2x}$.

On donnera les résultats sous forme factorisée.

$f_1'(x) = 2e^{2x}(2x+1)$	$f_2'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x+1)}{2}$	$f_3'(x) = -3e^{2x}(2x+1)$

● Pour f_1, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = 2f(x)$. Autrement dit, $f_1 = 2f$.
On en déduit que $f_1' = 2f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$).

● Pour f_2, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = \dfrac{f(x)}{2}$. Autrement dit, $f_2 = \dfrac{f}{2}$ ce que l'on peut écrire $f_2 = \dfrac{1}{2}f$.
On en déduit que $f_2' = \dfrac{1}{2}f'$ (formule du cours $(ku)' = ku'$) soit $f_2' = \dfrac{f'}{2}$.

● Pour f_3, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = 4-3f(x)$. Autrement dit, $f_3 = 4-3f$.
On en déduit que $f_3' = 0-3f'$ soit $f_3' = -3f'$.

2°) Démontrer que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\text{e}}$ (élèves portant un numéro pair) et que $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{\text{e}}}$ (élèves portant un numéro impair).

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\times \text{e}^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\text{e}^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{\text{e}} \\ &= -\frac{1}{2\text{e}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{4}\right) &= \left(-\frac{1}{4}\right)\times \text{e}^{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= -\frac{1}{4}\text{e}^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}\times\frac{1}{\text{e}^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{\text{e}}} \end{aligned}$$

3°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\times f(-x)=-x^2$ (résultat sous la forme la plus simple possible)

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\times f(-x) &= x\text{e}^{2x}\times\left(-x\text{e}^{-2x}\right) \quad \text{[les parenthèses écrites ici en rouge sont indispensables]} \\ &= -x^2\text{e}^{2x-2x} \\ &= -x^2\text{e}^{0} \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

On peut vérifier avec la calculatrice en utilisant la « technique du π ».

On tape le calcul de $f(\pi)\times f(-\pi)=\pi\text{e}^{2\pi}\times\pi\text{e}^{-2\pi}$.
La calculatrice fournit le résultat $-\pi^2$.

4°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-contre prend pour argument un réel *x*.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de *x* par *f*.
On suppose avoir importé préalablement la bibliothèque `math`.

```
def image(x):
     y=x*e**(2*x)
    return y
```

Autre possibilité : `y=x*exp(2*x)`

Il ne faut pas oublier les parenthèses.

On peut tester ce programme avec la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter directement l'égalité ci-contre. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4}$

La meilleure formule à appliquer ici est : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

2°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\ln 3$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Quel est le coefficient directeur de T ? On donnera la valeur exacte sous forme fractionnaire. $-\dfrac{9}{256}$

On calcule le nombre dérivé de f en ln 3.

Il n'y a pas besoin d'écrire une équation de T.

$$f'(\ln 3) = -\frac{3\mathrm{e}^{\ln 3}}{\left(\mathrm{e}^{\ln 3}+1\right)^4}$$

$$= -\frac{3\times 3}{4^4}$$

$$= -\frac{9}{256}$$

On vérifie à l'aide la calculatrice (Numworks : boîte à outils, puis rubrique Analyse).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1\right)^3}\right)\Bigg|_{\mathrm{x}=\ln(3)}$$

On obtient l'affichage : – 0,03515625. Il s'agit de la valeur exacte de $-\dfrac{9}{256}$.

$-\dfrac{9}{256}$ est un nombre décimal car 256 est une puissance de 2.

3°) On pose $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2023)$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de S. 0,146

On peut écrire $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2023} f(k)$ soit $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2023} \frac{1}{\left(\mathrm{e}^k+1\right)^3}$.

On ne peut pas calculer S à l'aide de formules car il ne s'agit pas de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

On obtient l'affichage suivant sur la calculatrice : 0,146258995.

$S = 0{,}14625899...$

III.

À tout réel a on associe la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{e}^{\left(a\mathrm{e}^x\right)}$.
Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f_a\,'(x) = a\mathrm{e}^{\left(x+a\mathrm{e}^x\right)}$. On fera apparaître la formule utilisée.

On utilise la formule $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$ avec la fonction $u : x \mapsto a\mathrm{e}^x$.

On a $u'(x) = a\mathrm{e}^x$ (la dérivée de u est égale à elle-même).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a\,'(x) = a\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{\left(a\mathrm{e}^x\right)}$ [ligne indispensables à écrire qui montre l'utilisation de la formule en situation]

$= a\mathrm{e}^{\left(x+a\mathrm{e}^x\right)}$ [on applique la relation fonctionnelle fondamentale de l'exponentielle]

Les parenthèses écrites autour de $x + a\mathrm{e}^x$ ne sont pas obligatoires.

2°) Déterminer a tel que $f_a(\ln 2) = 3$. $a = \dfrac{\ln 3}{2}$ (une seule égalité)

$f_a(\ln 2) = \mathrm{e}^{\left(a\mathrm{e}^{\ln 2}\right)} = \mathrm{e}^{2a}$

On procède par équivalences (chaîne d'équivalences).

On cherche a tel que $f_a(\ln 2) = 3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2a} = 3$

$\Leftrightarrow 2a = \ln 3$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{\ln 3}{2}$

On s'arrête là (valeur exacte).

IV.

Compléter la propriété (P) suivante où a et b sont des réels quelconques : « Si $a < b$, alors $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ ».

Comparer les nombres $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2023}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-2024}$. Justifier sur la ligne ci-dessous. $\mathrm{A} > \mathrm{B}$

On a $-2023 > -2024$ donc $\mathrm{e}^{-2023} > \mathrm{e}^{-2024}$ (par application de la propriété (P)).

Il n'y a pas besoin de transformer les écritures de A et B.

La calculatrice ne permet pas la comparaison des deux nombres car ils sont tous deux très proches de 0. Le calcul de A et B dépasse les capacités de la calculatrice.

A et B ne sont pas égaux à 0 ! Ce sont deux nombres strictement positifs.

Il y a d'autres techniques possibles pour comparer A et B.

On peut par exemple écrire que $\mathrm{e}^{-2023} = \mathrm{e}^{-2024} \times \mathrm{e}$.

On peut aussi appliquer la technique du quotient.

V.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note *D* la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 3-3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. On donne également les points $\mathrm{A}(2\,;4)$ et $\mathrm{B}(10\,;-2)$.

Tracer *D* sur l'écran de la calculatrice.

Les droites *D* et (AB) sont-elles parallèles ? Justifier brièvement.

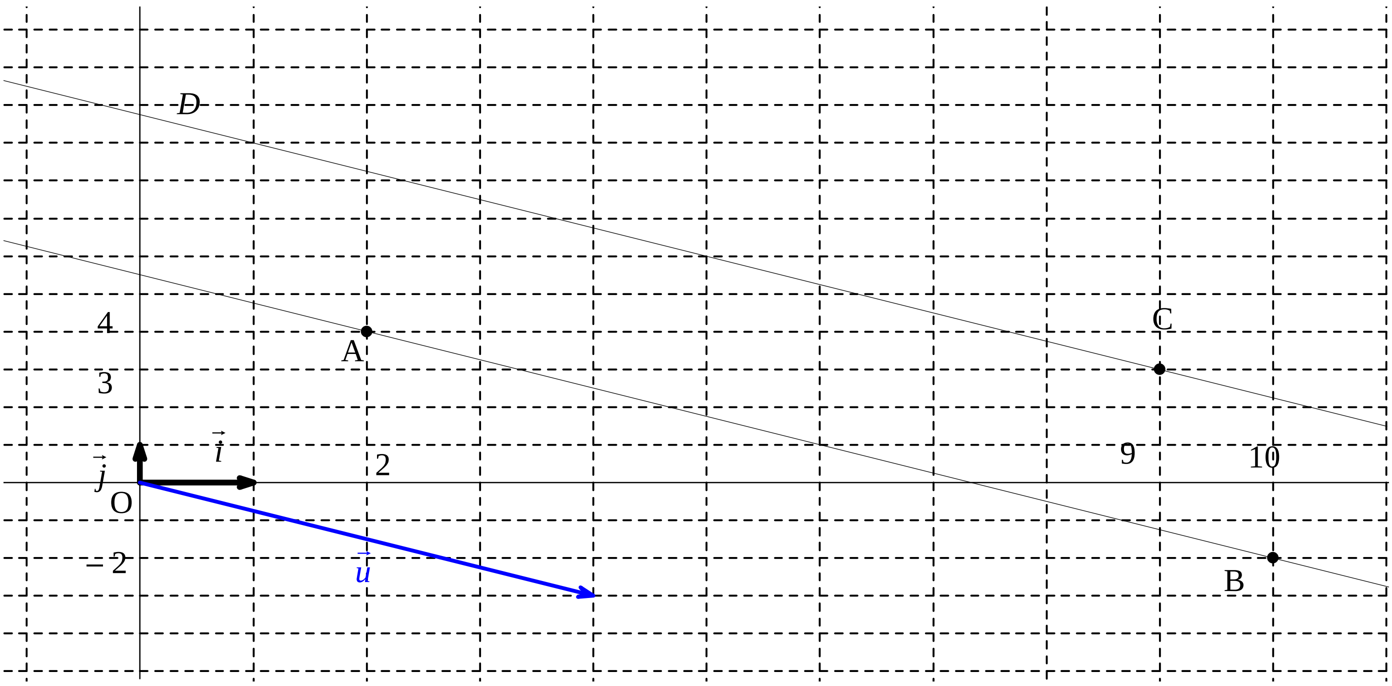
Calculatrice Numworks :

$\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} 9+4\mathrm{t} \\ 3-3\mathrm{t} \end{bmatrix}$ (modèle $\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{t}) \\ \sin(\mathrm{t}) \end{bmatrix}$ à remplacer)

Domaine de tracé
Tmin – 100
Tmax 100

On donne les bornes pour le paramètre t. On ne peut pas mettre que t va de – ∞ à + ∞.

On peut faire un graphique.



Le vecteur $\vec{u}(4\,;-3)$ est <u>un</u> vecteur directeur de D (d'après le système d'équations paramétriques).

Par ailleurs, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(8\,;-6)$.

On constate que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\vec{u}$, ce qui montre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires.

On en déduit que $D \,//\, (\mathrm{AB})$.

On peut aller plus loin dans la précision en observant, par exemple, que $\mathrm{A} \notin D$.

D et (AB) ne sont pas confondues. Elles sont donc strictement parallèles.

On peut aussi utiliser la notion de déterminant (déterminant d'un couple de vecteurs du plan dans une base de l'ensemble des vecteurs).

Rappel : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (déterminant d'ordre 2)

La notion de déterminant est utilisée en géométrie analytique pour la colinéarité des vecteurs dans le plan muni d'un repère.

La calculatrice Numworks permet de calculer les déterminants.