T exp

Interrogation écrite du mardi 3 octobre 2023 (40 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

On rappelle que la notation $[\![a\,;b]\!]$, où a et b sont des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, désigne l'ensemble des entiers relatifs x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Soit n un entier naturel fixé. On pose $E = [\![-n\,;2n]\!]$.

1°) Compléter l'égalité : $\text{card } E =$ ....

2°) Est-il possible de choisir n tel que $\text{card } E = 2023$? Si oui, donner la valeur de n. …….

3°) Que vaut le produit de tous les éléments de E ? …….

4°) On prend $n = 2$

Écrire en extension l'ensemble $F = \{2x,\, x \in E\}$. …………….……………………………

II. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

Dans cet exercice, on écrira les valeurs séparées par des virgules sur la ligne en pointillés.

1°) Déterminer tous les entiers naturels n appartenant à $[\![1\,;20]\!]$ tels que le nombre $\dfrac{18}{n}$ soit un nombre décimal non entier.

………………………………

2°) Déterminer les trois plus petits entiers naturels n supérieurs ou égaux à 1 tels que $18n$ soit un carré parfait.

………………………………

III. (2 points)

Écrire tous les couples $(a\,;b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2a + 3b = 23$. ………………………………

Parmi tous ces couples, quel est celui qui donne un produit maximal ? …………..

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On pose $A = \overline{110101}^{(\text{deux})}$ et $B = \overline{1222}^{(\text{trois})}$.

1°) Démontrer que A et B sont égaux.

………

………

………

2°) Déterminer l'écriture de A en base quatre.

…………..

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Compléter la propriété (P) suivante :

« Le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre …………….. ».

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

On suppose que x est un nombre rationnel non nul.
Quelle est la nature du nombre $f(x)$? Justifier.

………

………

………

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, n ! n'est pas un carré parfait.
Quelle est la nature du nombre $\sqrt{n!}$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 ?

………

………

2°) La proposition « Il existe un entier naturel n tel que $\sqrt{n!+1}$ soit un entier naturel » est-elle vraie ou fausse ?

………

Indications données à l'oral pour l'exercice VI

Factorielle d'un entier naturel

● Définition et notation

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle **« factorielle de *n* »** le produit de tous les entiers naturels de 1 à *n*.

On note ce nombre $n!$.

On a donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

● **Par convention,** on pose : $\boxed{\begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{array}}$

● Exemples

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

● Calculatrice Numworks

$\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{.}$

Corrigé de l'interrogation écrite du 3-10-2023

On rappelle que la notation $[\![a\,;b]\!]$, où a et b sont des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, désigne l'ensemble des entiers relatifs x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

I.

Soit n un entier naturel fixé. On pose $E = [\![-n\,;2n]\!]$.

1°) Compléter l'égalité : $\text{card}\,E = 3n+1$.

On applique la formule $\text{card}[\![a\,;b]\!] = b-a+1$ (a et b étant des entiers relatifs tels que $a \leqslant b$).

$\text{card}\,E = 2n-(-n)+1 = 3n+1$

2°) Est-il possible de choisir n tel que $\text{card}\,E = 2023$? Si oui, donner la valeur de n. 674

On cherche n tel que $3n+1 = 674$.

3°) Que vaut le produit de tous les éléments de E ? 0

$0 \in E$ donc le produit de tous les éléments est égal à 0.

4°) On prend $n = 2$
Écrire en extension l'ensemble $F = \{2x,\ x \in E\}$. $F = \{-2\,;0\,;2\,;4\}$

L'ordre des éléments n'a aucune importance dans l'écriture de l'ensemble.
On commence par écrire E en extension pour $n = 2$: $F = \{-1\,;0\,;1\,;2\}$.

II.

Dans cet exercice, on écrira les valeurs séparées par des virgules sur la ligne en pointillés.

1°) Déterminer tous les entiers naturels n appartenant à $[\![1\,;20]\!]$ tels que le nombre $\dfrac{18}{n}$ soit un nombre décimal non entier.

4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 20

2°) Déterminer les trois plus petits entiers naturels n supérieurs ou égaux à 1 tels que $18n$ soit un carré parfait.

2 ; 8 ; 18

On peut utiliser une fonction.

III.

Écrire tous les couples $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $2a+3b=23$. $(1;7)$; $(4;5)$; $(7;3)$; $(10;1)$

Il y a 4 couples $(a\,;b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $2a+3b=23$.

Parmi tous ces couples, quel est celui qui donne un produit maximal ? $(7\,;3)$

IV.

On pose $\mathrm{A}=\overline{110101}^{(\text{deux})}$ et $\mathrm{B}=\overline{1222}^{(\text{trois})}$.

1°) Démontrer que A et B sont égaux.

On écrit les décompositions de A et B dans les bases deux et trois.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=1\times2^0+1\times2^2+1\times2^4+1\times2^5\\&=1+4+16+32\\&=53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=2\times3^0+2\times3^1+2\times3^2+1\times3^3\\&=2+6+18+27\\&=53\end{aligned}$$

On constate que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

2°) Déterminer l'écriture de A en base quatre.

$$\mathrm{A}=\overline{311}^{(\text{quatre})}$$

Le mieux est d'appliquer la méthode traditionnelle pour convertir un nombre écrit en base dix dans une autre base.
On procède par des divisions euclidiennes successives.

$$\begin{array}{r|l}53 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & \begin{array}{r|l}13 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & \begin{array}{r|l}3 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 0\end{array}\end{array}\end{array}$$

V.

1°) Compléter la propriété (*P*) suivante :

« Le produit d'un nombre rationnel non nul par un nombre irrationnel est un nombre irrationnel ».

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

On suppose que x est un nombre rationnel non nul.
Quelle est la nature du nombre $f(x)$? Justifier.

Comme x est un nombre rationnel non nul, e^x est un nombre irrationnel (propriété du cours).

La propriété (P) permet d'affirmer que $f(x)$ est un nombre irrationnel.

On peut aller plus loin. Une propriété du cours permet d'affirmer que e^x est un nombre transcendant.
On en déduit que $f(x)$ est un nombre transcendant.

VI.

1°) On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, n ! n'est pas un carré parfait.
Quelle est la nature du nombre $\sqrt{n!}$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 ?

Comme $n \geqslant 2$, n ! n'est pas un carré parfait.
Par conséquent, $\sqrt{n!}$ est un nombre irrationnel (propriété sur la racine carrée d'un entier naturel).

2°) La proposition « Il existe un entier naturel n tel que $\sqrt{n!+1}$ soit un entier naturel » est-elle vraie ou fausse ?

La proposition est vraie.
En effet, pour $n = 4$, $\sqrt{4!+1} = \sqrt{25} = 5$ qui est bien un entier naturel.

On peut aussi prendre d'autres valeurs de n, telles que 7 ou encore 11.

Le « Il existe » signifie « Il existe au moins un ».