T experts

Interrogation écrite du vendredi 12 janvier 2024

Fiche et calculatrice
Durée : 30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (10 points : 1°) 4 points ; 2°) 3 points + 3 points)

Dans les deux questions de l'exercice, z et z' désignent deux nombres complexes de modules respectivement égaux à 4 et 2.

1°) Compléter les phrases suivantes. Faire la démonstration dans deux cas au choix.

- Le module de zz' est égal à …… .
- Le module de $\dfrac{z}{z'}$ est égal à …… .
- Le module de $z^2 z'$ est égal à …… .
- Le module de $\overline{z} \times z'$ est égal à …… .

………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………

2°) Soit n un entier naturel quelconque.

Exprimer le module des nombres complexes $u = \dfrac{z^{n+1}}{(z')^n}$ et $v = z^n \times (z')^{n+2}$ sous la forme d'une seule puissance de 2.

$|u| = ...$ $|v| = ...$

………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………
………………………………………………………… | …………………………………………………………

II. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 4 points)

À tout nombre complexe z on fait correspondre le nombre complexe $z' = z^2 + 1$.

1°) La fonction Python d'en-tête `def comp_mod(z):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un nombre complexe z et a pour but de renvoyer la valeur de vérité `True` si $|z| \leqslant |z'|$ et `False` sinon.
Compléter la ligne en pointillés par une instruction du type : « `if abs(…..) …… abs(…..) :` ».

```
def comp_mod(z):

    …………………………………...

      return True
    else:
      return False
```

2°) Compléter le tableau ci-dessous en effectuant les calculs au brouillon.

z	i	$1+\mathrm{i}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$	$1+\mathrm{i}\sqrt{2}$
z'				
Valeur de vérité renvoyée par la fonction				

Justifier les résultats de deux valeurs de vérité au choix.

……………………………………………………… | ………………………………………………………

……………………………………………………… | ………………………………………………………

……………………………………………………… | ………………………………………………………

……………………………………………………… | ………………………………………………………

III. (3 points)

On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note E l'ensemble des points M de P, d'affixe z, tels que $\left|z^2\right| = 4$.

Compléter la phrase :

L'ensemble E est le ………………………………………………… .

Rédiger la recherche sur la feuille annexe selon le modèle rappelé dans l'encadré (modèle à recopier et compléter).
Faire un graphique sur la feuille annexe et tracer E sur ce graphique.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………..……………………………….

Feuille annexe

Soit M un point quelconque de *P*, d'affixe *z*.

$M \in E$ $\Leftrightarrow$ ………..

$\Leftrightarrow$ ………..

$\Leftrightarrow$ ………..

Conclusion : L'ensemble *E* est le / la …… .

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 12-1-2024

I.

Dans les deux questions de l'exercice, z et z' désignent deux nombres complexes de modules respectivement égaux à 4 et 2.

1°) Compléter les phrases suivantes. Faire la démonstration dans deux cas au choix.

● Le module de zz' est égal à 8.

● Le module de $\dfrac{z}{z'}$ est égal à 2.

● Le module de z^2z' est égal à 32.

● Le module de $\overline{z}\times z'$ est égal à 8.

On utilise les propriétés du module (module d'un produit, module d'un quotient, module d'un conjugué, module d'une puissance).

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z|\times|z'| \\ &= 4\times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z^2z'| &= |z^2|\times|z'| \\ &= |z|^2\times|z'| \\ &= 4^2\times 2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{z}\times z'| &= |\overline{z}|\times|z'| \\ &= |z|\times|z'| \\ &= 4\times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

2°) Soit n un entier naturel quelconque.

Exprimer le module des nombres complexes $u=\dfrac{z^{n+1}}{(z')^n}$ et $v=z^n\times(z')^{n+2}$ sous la forme d'une seule puissance de 2.

$$|u| = 2^{n+2} \qquad\qquad |v| = 2^{3n+2}$$

Pour obtenir le résultat sous la forme d'une puissance de 2, il faut écrire 4 comme puissance de 2 puis utiliser les règles sur les puissances.

$$\begin{aligned} |u| &= \left|\frac{z^{n+1}}{z'^n}\right| \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{|z'|} \\ &= \frac{4^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{\left(2^2\right)^{n+1}}{2^n} \\ &= \frac{2^{2n+2}}{2^n} \\ &= 2^{2n+2-n} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v| &= \left| z^n \times z'^{n+2} \right| \\ &= |z|^n \times |z'|^{n+2} \\ &= 4^n \times 2^{n+2} \\ &= 4^n \times 2^{n+2} \\ &= \left(2^2\right)^n \times 2^{n+2} \\ &= 2^{2n} \times 2^{n+2} \\ &= 2^{3n+2} \end{aligned}$$

II.

À tout nombre complexe z on fait correspondre le nombre complexe $z' = z^2 + 1$.

1°) La fonction Python d'en-tête `def comp_mod(z):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un nombre complexe z et a pour but de renvoyer la valeur de vérité `True` si $|z| \leqslant |z'|$ et `False` sinon.
Compléter la ligne en pointillés par une instruction du type : « `if abs(…..) …… abs(…..) :` ».

```
def comp_mod(z):
    if abs(z)<=abs(z**2+1) :
      return True
    else:
      return False
```

2°) Compléter le tableau ci-dessous en effectuant les calculs au brouillon.

z	i	$1+\mathrm{i}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$	$1+\mathrm{i}\sqrt{2}$
z'	0	$1+2\mathrm{i}$	$\dfrac{1}{2}$	$2\mathrm{i}\sqrt{2}$
Valeur de vérité renvoyée par la fonction	False	True	False	True

Justifier les résultats de deux valeurs de vérité au choix.

Pour $z = \mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z' &= \mathrm{i}^2 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$|\, z \,| = 1$

$|\, z' \,| = 0$

On donne les modules sans calcul. Le module de 0 est égal à 0 (résultat du cours évident) et le module de i est égal à 1 (résultat de cours également).

On a $|\, z \,| > |\, z' \,|$ (attention à l'inégalité stricte qui est importante) donc la fonction renvoie False.

Pour $z = 1 + \mathrm{i}$

$$\begin{aligned} z' &= (1+\mathrm{i})^2 + 1 \\ &= 1 + 2\mathrm{i} - 1 + 1 \\ &= 1 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

$|\, z \,| = |\, 1+\mathrm{i} \,| = \sqrt{2}$

$|\, z' \,| = |\, 1+2\mathrm{i} \,| = \sqrt{5}$

On a $|\, z \,| \leqslant |\, z' \,|$ donc la fonction renvoie True.

III.

On se place dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note *E* l'ensemble des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $|\, z^2 \,| = 4$.

Compléter la phrase :

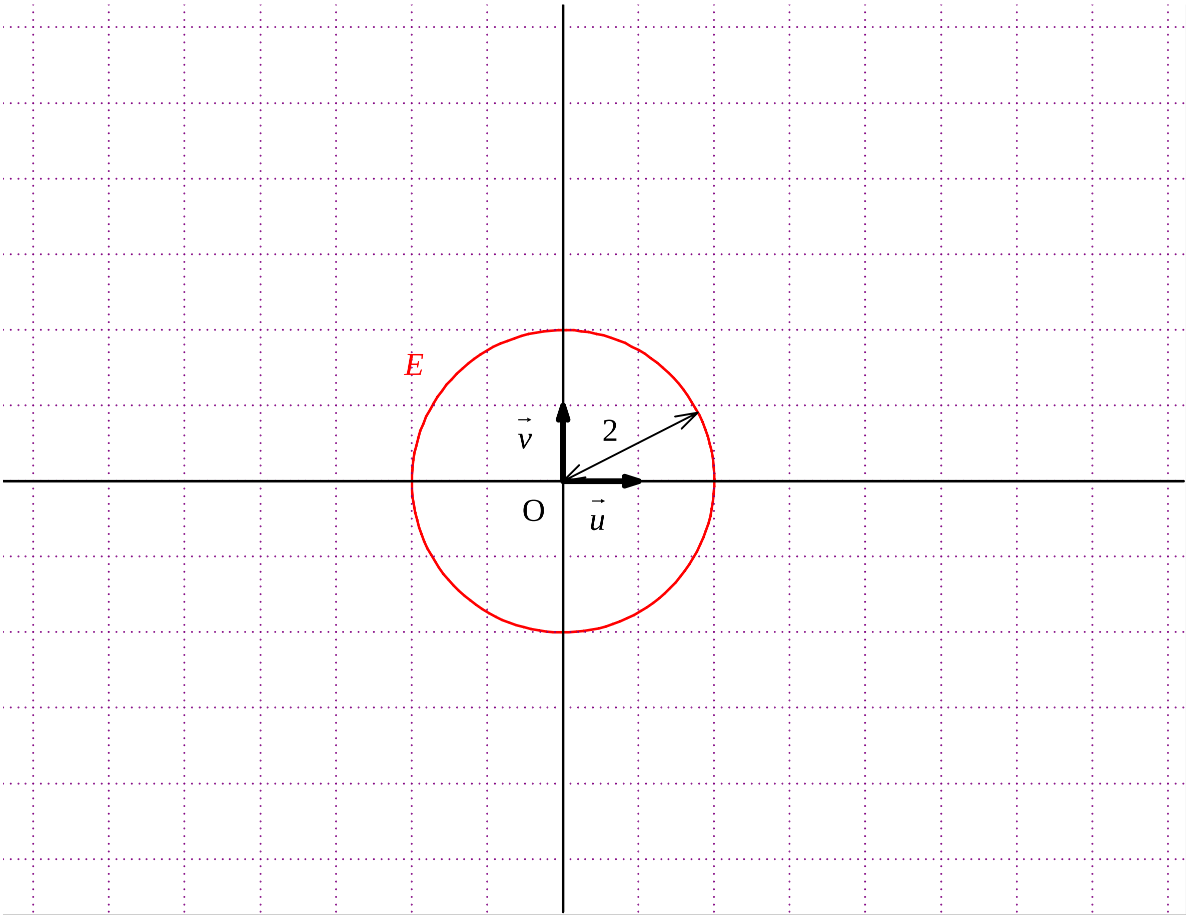
L'ensemble *E* est le cercle de centre O et de rayon 2.

Rédiger la recherche sur la feuille annexe selon le modèle rappelé dans l'encadré (modèle à recopier et compléter). Faire un graphique sur la feuille annexe et tracer *E* sur ce graphique.

Soit M un point quelconque de *P*, d'affixe *z*.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow |\, z^2 \,| = 4 \\ &\Leftrightarrow |\, z \,|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow |\, z \,| = 2 \quad (\text{car } |\, z \,| \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM} = 2 \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble *E* est le cercle de centre O et de rayon 2.



E
2
O