T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 29 septembre 2023

Fiche
50 min

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………..…………………………………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 3°) sur les lignes en bas de cette page.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

En déduire, sans calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{2\left(x^2+1\right)}$, $f_3 : x \mapsto 4-\dfrac{3x}{x^2+1}$.

………………………………………	………………………………………	………………………………………

2°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel x.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de x par f.

```
def image(x):
    y=………………..…..
    return y
```

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto 1-2x$ définie $\mathbb{R}$. On note h la composée de f suivie de g : $h = g \circ f$.

Démontrer que pour tout réel x on a $h(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

1°) ….……………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

3°) ….……………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

……………………………………………..……………

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est-elle une solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = 2 \quad (\mathrm{E})$? ☐ oui ☐ non

---

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) On considère la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter directement l'égalité ci-contre en donnant un résultat simplifié. $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ définies sur $\mathbb{R}$ et on donne les expressions suivantes : a. $-\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; b. $\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; c. $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$; d. $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; e. $-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

Pour chaque fonction, écrire la lettre qui correspond à l'expression de sa dérivée. On effectuera tous les calculs nécessaires au brouillon.

f_1 : ….. f_2 : ….. f_3 : …..

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter directement l'égalité ci-contre $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Quel est le coefficient directeur de T ? On donnera la valeur exacte sous forme fractionnaire. ……

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - 4x + 3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Donner l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

VI. (3 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Tracer D sur l'écran de la calculatrice.

1°) Déterminer les coordonnées d'un point A de D et les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

……………… ………………

2°) Quelle est l'abscisse du point B de D dont l'ordonnée est égale à 2023 ? ……………

Consignes de présentation données à l'oral

Les traits de fractions devront faits à la règle. De même, pour les radicaux.

I.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On n'écrit pas $1x$. Il faut écrire $1 \times x$ ou x tout court.

Corrigé de l'interrogation écrite du 29-9-2023

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On écrira le détail des calculs des questions 1°) et 3°) sur les lignes en bas de cette page.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{1\times\left(x^2+1\right)-x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

En déduire, sans calculs, la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{2\left(x^2+1\right)}$, $f_3 : x \mapsto 4-\dfrac{3x}{x^2+1}$.

$f_1'(x)=2\times\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$	$f_2'(x)=\dfrac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)^2}$	$f_3'(x)=\dfrac{3\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

• Pour f_1, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x)=2f(x)$. Autrement dit, $f_1=2f$.
On en déduit que $f_1'=2f'$ (formule du cours $(ku)'=ku'$).

• Pour f_2, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x)=\dfrac{f(x)}{2}$. Autrement dit, $f_2=\dfrac{f}{2}$ ce que l'on peut écrire $f_2=\dfrac{1}{2}f$.
On en déduit que $f_2'=\dfrac{1}{2}f'$ (formule du cours $(ku)'=ku'$) soit $f_2'=\dfrac{f'}{2}$.

• Pour f_3, on observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x)=4-3f(x)$. Autrement dit, $f_3=4-3f$.
On en déduit que $f_3'=0-3f'$ soit $f_3'=-3f'$.

2°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel *x*. Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de *x* par *f*.

```
def image(x):
    y= x/(x**2+1)
    return y
```

Il ne faut pas oublier les parenthèses.

On peut tester ce programme avec la calculatrice.

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto 1-2x$ définie $\mathbb{R}$. On note *h* la composée de *f* suivie de *g* : $h = g \circ f$.

Démontrer que pour tout réel *x* on a $h(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

$\forall x \in I \quad h(x)=g\left[f(x)\right]$ (par définition de la composée de deux fonctions)

$$=1-2\times\frac{x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2-1$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction *f* est-elle une solution de l'équation différentielle $xy'-2y=2 \quad (\mathrm{E})$? ☒ oui ☐ non

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=-2x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad xf'(x)-2f(x)=x\times(-2x)-2\times(-x^2-1)$

$$=-2x^2+2x^2+2$$

$$=2$$

On en déduit que *f* est solution de l'équation différentielle (E).

III.

1°) On considère la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter directement l'égalité ci-contre en donnant un résultat simplifié. $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2°) On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ définies sur $\mathbb{R}$ et on donne les expressions suivantes : a. $-\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; b. $\dfrac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; c. $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$; d. $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$; e. $-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

Pour chaque fonction, écrire la lettre qui correspond à l'expression de sa dérivée. On effectuera tous les calculs nécessaires au brouillon.

f_1 : c $\qquad$ f_2 : d $\qquad$ f_3 : a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \times \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \times \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter directement l'égalité ci-contre $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \quad f'(x) = -\dfrac{6}{(2x-1)^4}$

On applique la formule $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

On obtient $f'(x) = -\frac{3\times 2}{(2x-1)^4}$.

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{3}{2}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Quel est le coefficient directeur de T ? On donnera la valeur exacte sous forme fractionnaire. $-\frac{3}{8}$

Par définition de la tangente, le coefficient directeur de T est égal au nombre dérivé de f en $\frac{3}{2}$.

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)^4} = -\frac{6}{(3-1)^4} = -\frac{6}{2^4} = -\frac{3}{8}$$

On vérifie avec la calculatrice (calcul d'un nombre dérivé).

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-4x+3x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Donner l'expression d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x) = x - 2x^2 + x^3$

On cherche l'expression d'une fonction dont la dérivée est égale à f.

On peut écrire $\mathrm{F}(x) = x(x-1)^2$ (forme factorisée).

On peut ajouter n'importe quelle constante, comme dans les exemples suivants :

$\mathrm{F}(x) = x - 2x^2 + x^3 + \frac{3}{4}$;

$\mathrm{F}(x) = x - 2x^2 + x^3 + 20$;

$\mathrm{F}(x) = x - 2x^2 + x^3 - 5$;

$\mathrm{F}(x) = x - 2x^2 + x^3 + \pi$;

etc.

VI.

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tracer D sur l'écran de la calculatrice.

1°) Déterminer les coordonnées d'un point A de D et les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

$\mathrm{A}(2\,;1) \qquad \vec{u}(3\,;-2)$

On peut appliquer directement le résultat du cours ou refaire toute la démarche.

Soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ un point et $\vec{u}\ (\alpha\ ;\ \beta)$ un vecteur non nul.
Un système d'équations paramétriques de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Un point $M(x\ ;\ y)$ du plan appartient à la droite D si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées x et y de M vérifient le système. Dans ce cas, t est le réel tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Le point A est le point associé à $t = 0$.

En prenant d'autres valeurs du paramètre, on peut donner d'autres points.

2°) Quelle est l'abscisse du point B de D dont l'ordonnée est égale à 2023 ? – 3031

Le paramètre t du point B sur D vérifie $1 - 2t = 2023$. On obtient immédiatement $t = -\dfrac{2022}{2} = -1011$.
On a donc $x_B = 2 + 3 \times (-1011) = 2 - 3033 = -3031$.