T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 22 septembre 2023

Fiche
50 min

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..…………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 20x^2 + 109x + 90$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Vérifier que – 10 est une racine de $P(x)$. Présenter les calculs sur la feuille annexe.

Écrire $P(x)$ comme produit d'un polynôme du premier degré par un polynôme du second degré.

……………………………………………………………………………………

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère l'équation $(mx - 1)^2 = x$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où m est un paramètre réel.

Les 3 questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m = 1$.

Écrire sur les pointillés ci-dessous l'ensemble S des solutions de (E).

Écrire sur la feuille annexe toute la démarche bien rédigée.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Est-il possible de choisir m tel que 0 soit solution de (E) ?

Répondre par oui ou non et si oui, écrire la (ou les) valeur(s) de m. Rédiger la démarche sur la feuille annexe.

……………………..

3°) Est-il possible de choisir m tel que 4 soit solution de (E) ?

Répondre par oui ou non et si oui, écrire la (ou les) valeur(s) de m. Rédiger la démarche sur la feuille annexe.

……………………..

III. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est-elle une fonction polynôme ? Détailler la démarche sur la feuille annexe.

…………………………………………………………..…………………………………………………………

…………………………………………………………..…………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (2x-3)^5$ définie sur $\mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel *x*.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de *x* par *f*.

```
def image(x):
    y=………………….
    return y
```

2°) Compléter les égalités suivantes en donnant les résultats sous la forme $a\sqrt{2}+b$ avec *a* et *b* entiers.

$f\left(\sqrt{2}\right)=$ …………………… $f\left(\sqrt{2}-1\right)=$ …………………… $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$ ……………………

V. (1 point)

Déterminer le(s) réel(s) $x>1$ tel(s) que la moyenne géométrique de $x-1$ et $x+1$ soit égale à 2.

………………..…

VI. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ où *a* et *b* sont deux réels.

Déterminer *a* et *b* tels que pour tout réel *x* on ait $2f(x)+f(x+1)=3x-5$.

…………………………………………….

VII. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit *x* un réel non nul quelconque. Exprimer $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de *x* pour sous la forme d'un seul quotient.

…………………………………………….

VIII. (4 points : 2 points par système)

On considère le graphique avec un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan donné sur la feuille annexe.

On note *D* la droite passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur et D' la droite passant par le point B et admettant le vecteur $\vec{v}$ pour vecteur directeur.
Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de chacune des droites *D* et D'.

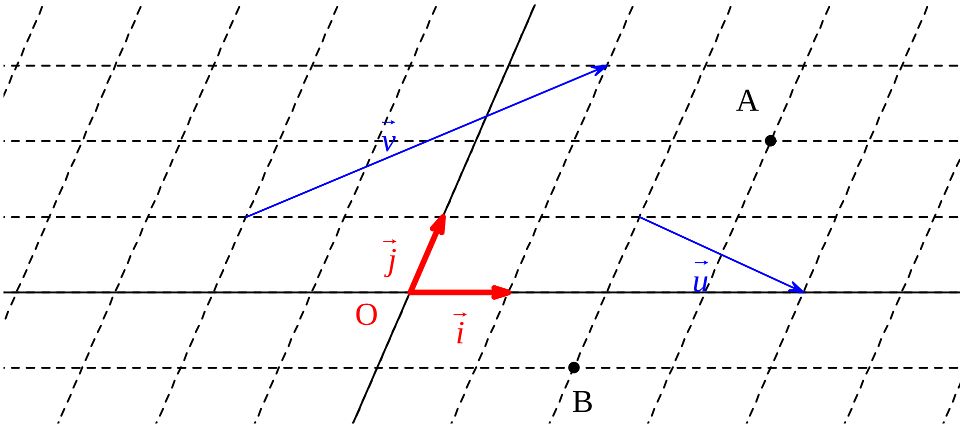
T spécialité

Feuille annexe de l'interrogation écrite du vendredi 22 septembre 2023

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………..………………………………

Graphique du VIII



Les points A et B ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont à coordonnées entières.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 22-9-2023

I.

On considère le polynôme $P(x)=x^3+20x^2+109x+90$ avec $x\in\mathbb{R}$.

Vérifier que – 10 est une racine de $P(x)$. Présenter les calculs sur la feuille annexe.

Écrire $P(x)$ comme produit d'un polynôme du premier degré par un polynôme du second degré.

$$\begin{aligned}P(-10)&=(-10)^3+20\times(-10)^2+109\times(-10)+90\\&=-1000+2000-1090+90\\&=0\end{aligned}$$

On en déduit que – 10 est une racine de $P(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=(x+10)(x^2+10x+9)$

Il y a plusieurs méthodes pour obtenir cette factorisation.

1$^{\text{ère}}$ méthode :
On utilise la méthode des coefficients indéterminés.

2$^{\text{e}}$ méthode :
On peut « deviner » le polynôme.

3$^{\text{e}}$ méthode :
On effectue une division euclidienne de polynômes.

II.

On considère l'équation $(mx-1)^2=x\quad(\text{E})$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ où m est un paramètre réel.
Les 3 questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m=1$.

Écrire sur les pointillés ci-dessous l'ensemble S des solutions de (E).

Écrire sur la feuille annexe toute la démarche bien rédigée.

$$S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}\text{ (une seule égalité)}$$

Pour $m=1$, l'équation (E) s'écrit $(x-1)^2=x$.

Par développement, on obtient l'équation équivalente $x^2-3x+1=0$.

Le polynôme x^2-3x+1 est un polynôme du second degré.
On calcule le discriminant $\Delta=5$.

Il admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

On vérifie à la calculatrice en effectuant la résolution de l'équation $(x-1)^2 = x$. La calculatrice fournit alors des valeurs approchées des solutions.

2°) Est-il possible de choisir *m* tel que 0 soit solution de (E) ?
Répondre par oui ou non et si oui, écrire la (ou les) valeur(s) de *m*. Rédiger la démarche sur la feuille annexe.

non

On cherche s'il existe des réels *m* tels que $(m\times 0-1)^2 = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 1=0$ impossible

3°) Est-il possible de choisir *m* tel que 4 soit solution de (E) ?
Répondre par oui ou non et si oui, écrire la (ou les) valeur(s) de *m*. Rédiger la démarche sur la feuille annexe.

$$\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}$$

On cherche s'il existe des réels *m* tels que $(m\times 4-1)^2 = 4 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (4m-1)^2 = 4\\ &\Leftrightarrow 4m-1=2 \text{ ou } 4m-1=-2 \qquad \text{(on n'utilise pas le discriminant)}\\ &\Leftrightarrow m=\frac{3}{4} \text{ ou } m=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction *f* est-elle une fonction polynôme ? Détailler la démarche sur la feuille annexe.

Pour répondre à la question, on développe l'expression.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x) &= \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2\\ &= x^2+1\cancel{+2x\sqrt{x^2+1}}+x^2+x^2+1\cancel{-2x\sqrt{x^2+1}}+x^2\\ &= 4x^2+2\end{aligned}$$

L'expression obtenue montre que *f* est une fonction polynôme (du second degré, incomplète en *x*).

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto (2x-3)^5$ définie sur $\mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel *x*.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de *x* par *f*.

```
def image(x):
    y=(2*x-3)**5
    return y
```

2°) Compléter les égalités suivantes en donnant les résultats sous la forme $a\sqrt{2}+b$ avec *a* et *b* entiers.

$$f\left(\sqrt{2}\right)=2378\sqrt{2}-3363 \qquad f\left(\sqrt{2}-1\right)=10378\sqrt{2}-14725 \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=589\sqrt{2}-843$$

Pour le calcul de $f\left(\sqrt{2}-1\right)$, on peut écrire $f\left(\sqrt{2}-1\right)=\left[2\times\left(\sqrt{2}-1\right)-3\right]^5=\left(2\sqrt{2}-5\right)^5$ ou taper directement l'expression avec des parenthèses.

V.

Déterminer le(s) réel(s) $x>1$ tel(s) que la moyenne géométrique de $x-1$ et $x+1$ soit égale à 2.

$$\sqrt{5}$$

On cherche le(s) réel(s) $x>1$ tel(s) que $\sqrt{(x-1)(x+1)}=2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=2$

$\Leftrightarrow x^2-1=4$ (on a élevé les deux membres au carré)

$\Leftrightarrow x^2=5$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ (car *x* est positif compte tenu de la condition $x>1$)

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ où *a* et *b* sont deux réels.

Déterminer *a* et *b* tels que pour tout réel *x* on ait $2f(x)+f(x+1)=3x-5$.

$$a=1 \ ; \ b=-2$$

On traduit l'égalité $2f(x)+f(x+1)=3x-5 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2(ax+b)+a(x+1)+b=3x-5$

$\Leftrightarrow 3ax+a+3b=3x-5$

Pour que (1) soit vérifiée pour tout réel *x*, il faut et il suffit que $\begin{cases} 3a=3 \\ a+3b=-5 \end{cases}$ (principe d'identification des coefficients).

La résolution de ce système est immédiate et donne $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

On peut effectuer une vérification directe : la fonction $f : x \mapsto x-2$ est bien telle que pour tout réel x on ait $2f(x)+f(x+1)=3x-5$.

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel non nul quelconque. Exprimer $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de x pour sous la forme d'un seul quotient.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}$$

VIII.

On considère le graphique avec un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan donné sur la feuille annexe.

On note D la droite passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur et D' la droite passant par le point B et admettant le vecteur $\vec{v}$ pour vecteur directeur.
Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de chacune des droites D et D'.

On peut appliquer directement le résultat du cours ou refaire toute la démarche.

> Soit $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}\,;\,y_{\mathrm{A}}\right)$ un point et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ un vecteur non nul.
>
> Un système d'équations paramétriques de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit
> $\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Un point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\right)$ du plan appartient à la droite D si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées x et y de M vérifient le système. Dans ce cas, t est le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right.$ et $\vec{u}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$ donc un système d'équations paramétriques de la droite D s'écrit $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $\left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$.

$\mathrm{B}\left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right.$ donc un système d'équations paramétriques de la droite D' s'écrit $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$.

On peut tracer D et D' sur le graphique.