T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 15 septembre 2023

Groupe A
50 min

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………..………………………………

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère le polynôme $P(x)=2-x-x^2$.

1°) Compléter sans explications la phrase suivante : Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont : ……………

Compléter le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	

2°) Exprimer $\left|P(x)\right|$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.

- Si $x\in$……………………………, alors $\left|P(x)\right|=$……………………………

- Si $x\in$……………………………, alors $\left|P(x)\right|=$……………………………

3°) Calculer $P\left(-\sqrt{3}\right)$ et $P\left(\sqrt{3}-1\right)$.

On détaillera toutes les étapes de calculs sur les lignes ci-dessous.

…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………
…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………
…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………
…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………
…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………
…………………………………………..…………… | …………………………………………..……………

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer la forme canonique du polynôme $P(x)=3x^2-6x-2$.

2°) Factoriser au maximum le polynôme $Q(x)=x^4-5x^2+4$ en polynômes du premier degré.

$P(x)=$……………………………………… $\qquad$ $Q(x)=$………………………………………

III. (3 points)

Déterminer les réels x tel que les nombres 1, $2x$, x^2 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Écrire les valeurs de x sans égalités sur les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

…………………………

IV. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel x.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de x par f.

```
def image(x):
    y=…………………
    return y
```

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = (x-2)^2$ et on note D la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

1°) Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$? S(….. ; …..)

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D.
Compléter les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

A(………. ; ……….) B(………. ; ……….) [on suppose que $x_{\mathrm{A}} < x_{\mathrm{B}}$]

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point + 1 point)

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto (mx-1)^2 - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de m. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Déterminer l'ensemble E des réels m non nuls tels que l'équation $f_m(x) = 0$ admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

…………………………… (une seule égalité)

Pour $m \in E$, que vaut le produit des racines ? Que peut-on en déduire pour le signe de ces deux racines ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

T spécialité	**Interrogation écrite du vendredi 15 septembre 2023**	**Groupe B** 50 min

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..…………………………… **Note : ….. / 20**

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère le polynôme $P(x)=2-x-x^2$.

1°) Compléter sans explications la phrase suivante : Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont : ……………

Compléter le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	

2°) Exprimer $|P(x)|$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.

• Si $x \in$ ...., alors $|P(x)|=$ ....

• Si $x \in$ ...., alors $|P(x)|=$ ....

3°) Calculer $P\left(-\sqrt{3}\right)$ et $P\left(\sqrt{3}-1\right)$.

On détaillera toutes les étapes de calculs sur les lignes ci-dessous.

………………………………………..……………	………………………………………..……………
………………………………………..……………	………………………………………..……………
………………………………………..……………	………………………………………..……………
………………………………………..……………	………………………………………..……………
………………………………………..……………	………………………………………..……………
………………………………………..……………	………………………………………..……………

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer la forme canonique du polynôme $P(x)=3x^2-6x-2$.

2°) Factoriser au maximum le polynôme $Q(x)=x^4-5x^2+4$ en polynômes du premier degré.

$P(x)=$ .... $\qquad$ $Q(x)=$ ....

III. (3 points)

Déterminer les réels x tels que les nombres 1, $2x$, x^2 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Écrire les valeurs de x sans égalités sur les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

…………………………..

IV. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel x.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de x par f.

```
def image(x):
    y=…………………..
    return y
```

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = (x-2)^2$ et D la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

1°) Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$? S(….. ; …..)

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D.
Compléter les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

A(……….. ; ………..) B(……….. ; ………..) [on suppose que $x_{\text{A}} < x_{\text{B}}$]

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point + 1 point)

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto (mx-1)^2 - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de m. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

…………………………… (une seule égalité)

2°) Déterminer l'ensemble E des réels m non nuls tels que l'équation $f_m(x) = 0$ admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

…………………………… (une seule égalité)

Pour $m \in E$, que vaut le produit des racines ? Que peut-on en déduire pour le signe de ces deux racines ?

……

……

T
Spécialité

Feuille annexe de l'interrogation écrite du vendredi 15 septembre 2023

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………..……………………………….

Bonus (sur 1 point, à traiter s'il reste du temps) :

On reprend la fonction f de l'exercice **IV**. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f\left(2x\right)=f\left(x\right)$.

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

…………………………………………………..………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-9-2023

I.

On considère le polynôme $P(x) = 2 - x - x^2$.

1°) Compléter sans explications la phrase suivante : Les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont 1 et – 2.

Compléter le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les racines (ou les zéros) du polynôme $P(x)$ sont 1 (racine évidente) et – 2.
On effectue évidemment une vérification à l'aide de la calculatrice.

Le signe de $P(x)$ s'obtient par la règle du signe d'un polynôme du second degré.
On vérifie sur calculatrice en traçant la courbe représentative de P.

2°) Exprimer $|P(x)|$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.

• Si $x \in \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$, alors $|P(x)| = -\left(2 - x - x^2\right) = x^2 + x - 2$.

• Si $x \in [-2\,;1]$, alors $|P(x)| = 2 - x - x^2$.

On utilise la propriété suivante où A est un réel quelconque.

$$|\mathrm{A}| = \begin{cases} \mathrm{A} & \text{si A est positif ou nul} \\ -\mathrm{A} & \text{si A est négatif ou nul} \end{cases}$$

La valeur absolue de 0 est égale à 0.

3°) Calculer $P\left(-\sqrt{3}\right)$ et $P\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
On détaillera toutes les étapes de calculs sur les lignes ci-dessous.

On respecte la forme donnée pour $P(x)$. Il n'y a pas besoin de remanier l'expression.

$$\begin{aligned} P\left(-\sqrt{3}\right) &= 2 - \left(-\sqrt{3}\right) - \left(-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 2 + \sqrt{3} - 3 \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{3} - 1\right) &= 2 - \left(\sqrt{3} - 1\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \\ &= 2 - \sqrt{3} + 1 - \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right) \\ &= 3 - \sqrt{3} - \left(4 - 2\sqrt{3}\right) \\ &= 3 - \sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

On vérifie les résultats grâce à la calculatrice.
On constate que les deux résultats sont égaux.

II.

Les deux questions sont indépendantes.
1°) Déterminer la forme canonique du polynôme $P(x) = 3x^2 - 6x - 2$.
2°) Factoriser au maximum le polynôme $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ en polynômes du premier degré.

$$P(x) = 3(x-1)^2 - 5 \qquad Q(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

1°)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 3\left(x^2 - 2x\right) - 2$ (factorisation partielle des deux premiers termes)

$$= 3\left[(x-1)^2 - 1\right] - 2$$

$$= 3(x-1)^2 - 5$$

On vérifie aisément le résultat obtenu (valeurs tests, développement, formules avec α et β).

2°) $Q(x)$ est un polynôme bicarré.

On pose $X = x^2$ (changement de variable), de sorte que $Q(x) = X^2 - 5X + 4$.

$X^2 - 5X + 4$ est un polynôme du second degré dont les racines (ou les zéros) sont 1 et 4.

On a donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ (formule de factorisation d'un polynôme du second degré admettant deux 2 racines).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)$

$$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

On vérifie en développant le produit.

III.

Déterminer les réels x tels que les nombres 1, $2x$, x^2 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Écrire les valeurs de x sans égalités sur les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

$$2+\sqrt{3} \; ; \; 2-\sqrt{3}$$

On doit commencer par « mettre en équation » le problème (étape de « mise en équation »).

On n'introduit pas de suite (u_n).

On a deux types de conditions nécessaires et suffisantes pour que 3 réels soient 3 termes consécutifs d'une suite connaît arithmétique (on parle de progression arithmétique).

Soit *a*, *b*, *c* trois réels.

CNS pour que *a*, *b*, *c* soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique :

1^er^ type :

Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = b + r$.

Il existe un réel r tel que $a = b - r$ et $c = b + r$.

Il existe un réel r tel que $b = a + r$ et $c = a + 2r$.

2^e^ type :

On peut se référer aux images mentales liées aux termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$b - a = c - b$
$2b = a + c$
$b = \dfrac{a+c}{2}$ (le nombre du « milieu » est la moyenne arithmétique des 2 autres)

On va utiliser l'égalité $2b = a + c$ (plus simple pour les calculs).

Pour que les nombres 1, 2*x*, x^2 soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il faut et il suffit que $2 \times 2x = 1 + x^2 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$ ou $x = 2 - \sqrt{3}$ (résolution grâce au discriminant réduit ; vérification grâce à la calculatrice)

Complément :

• Pour $x = 2 + \sqrt{3}$, les nombres sont 1, $2\left(2+\sqrt{3}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.
On vérifie aisément que dans cet ordre, ils sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $3 + 2\sqrt{3}$.

• Pour $x = 2 - \sqrt{3}$, les nombres sont 1, $2\left(2-\sqrt{3}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$, $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.
On vérifie aisément que dans cet ordre, ils sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $3 - 2\sqrt{3}$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction Python d'en-tête `def image(x):` écrite dans le cadre ci-dessous prend pour argument un réel x.
Compléter les pointillés afin qu'elle renvoie l'image de x par f.

```
def image(x):
    y=2*x**2+x-3
    return y
```

On respecte la syntaxe des opérations en langage Python.
On peut tester le programme sur la calculatrice.

V.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = (x-2)^2$ et D la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

1°) Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$? $\text{S}(2\,;0)$

$(x-2)^2$ est un polynôme écrit sous forme canonique [$1 \times (x-2)^2 + 0$].

La parabole d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où a, α, β sont des réels, a étant non nul, a pour sommet $\text{S}(\alpha\,;\beta)$.

On obtient donc immédiatement les coordonnées du sommet.

On vérifie en traçant $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice.

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D.
Compléter les pointillés ci-dessous et écrire toute la démarche sur la feuille annexe.

$\text{A}\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\,;\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$ $\text{B}\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\,;\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\right)$ [on suppose que $x_\text{A} < x_\text{B}$]

D a pour équation réduite $y = x + 1$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $(x-2)^2 = x + 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ (résolution grâce au discriminant ; vérification à l'aide de la calculatrice)

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont donc $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

On calcule les ordonnées des deux points en utilisant l'équation réduite de D plutôt que l'équation de $\mathcal{C}$ (les calculs sont plus simples). Par exemple, $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}+1=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}+1=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

On peut vérifier le résultat graphiquement en traçant la droite D sur le graphique ou sur l'écran de la calculatrice.

Il est préférable d'écrire une équation plutôt qu'un système.

VI.

Groupe A

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto (mx-1)^2 - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de m. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

$$\Delta_m = -4m^2 + 4m + 1 \text{ (une seule égalité)}$$

On commence par développer, réduire et ordonner $f_m(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = \left(m^2x^2 - 2mx + 1\right) - x + 1$

$\qquad\qquad = m^2x^2 - (2m+1)x + 2$

Comme m est non nul par hypothèse, m^2 est aussi non nul, et par conséquent, $f_m(x)$ est un polynôme du second degré.

On calcule le discriminant en utilisant les coefficients (sans les x !).

$\Delta_m = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4 \times m^2 \times 2$ (on applique la formule du discriminant « en situation »)

$= (2m+1)^2 - 8m^2$

$= 4m^2 + 4m + 1 - 8m^2$

$= -4m^2 + 4m + 1$

2°) Déterminer l'ensemble E des réels m non nuls tels que l'équation $f_m(x) = 0$ admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$$E = \left]\frac{1-\sqrt{2}}{2} ; 0\right[\cup \left]0 ; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[\text{ (une seule égalité)}$$

On résout l'inéquation $-4m^2 + 4m + 1 > 0$ avec la condition $m \neq 0$.
On cherche les racines du polynôme $-4m^2 + 4m + 1$ grâce au discriminant réduit : $\Delta' = 8$.

$m_1 = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{-4} = \dfrac{2-\sqrt{8}}{4} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

$m_2 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{-4} = \dfrac{2+\sqrt{8}}{4} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Pour $m \in E$, que vaut le produit des racines ? Que peut-on en déduire pour le signe de ces deux racines ?

Pour $m \in E$, le produit des racines est égal à $\dfrac{2}{m^2}$ (formule du cours).

Comme $\dfrac{2}{m^2} > 0$, les deux racines sont de même signe.

Groupe B

À tout réel m non nul on associe la fonction $f_m : x \mapsto (mx-1)^2 - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de m. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

$$\Delta_m = 4m+1 \text{ (une seule égalité)}$$

On commence par développer, réduire et ordonner $f_m(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = \left(m^2x^2 - 2mx + 1\right) - x$

$= m^2x^2 - (2m+1)x + 1$

Comme m est non nul par hypothèse, m^2 est aussi non nul, et par conséquent, $f_m(x)$ est un polynôme du second degré.

On calcule le discriminant.

$\Delta_m = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4 \times m^2 \times 1$ (on applique la formule du discriminant « en situation »)

$= (2m+1)^2 - 4m^2$

$= \cancel{4m^2} + 4m + 1 - \cancel{4m^2}$

$= 4m+1$

2°) Déterminer l'ensemble E des réels m non nuls tels que l'équation $f_m(x) = 0$ admette deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$$E = \left]-\frac{1}{4} ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[\text{ (une seule égalité)}$$

On résout l'inéquation $4m+1 > 0$ avec la condition $m \neq 0$.

Pour $m \in E$, que vaut le produit des racines ? Que peut-on en déduire pour le signe de ces deux racines ?

Pour $m \in E$, le produit des racines est égal à $\frac{1}{m^2}$.

Comme $\frac{1}{m^2} > 0$, les deux racines sont de même signe.
N. B. : On peut aller plus loin en observant que l'équation $f_m(x) = 0$ est équivalente à $(mx-1)^2 = x$.
Cette dernière égalité montre que toute solution de l'équation est positive ou nulle.
On montre aisément que 0 n'est pas solution. On en déduit que les deux racines sont strictement positives.

On peut aussi raisonner en utilisant la somme.

Bonus :
On reprend la fonction *f* de l'exercice **IV**. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(2x) = f(x)$.

$f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(2x) = f(x) \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 2\times(2x)^2 + 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$$

$$\Leftrightarrow 2\times 4x^2 + 2x = 2x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 2x = 2x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{6}$$

Les solutions de (1) sont 0 et $-\frac{1}{6}$.

On observera que l'on n'a pas utilisé le discriminant pour résoudre l'équation $6x^2 + x = 0$ car il s'agit d'une équation incomplète.