Cas particulier du théorème des résidus

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

On suppose que Q n'a pas de racine réelle et que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$.

Notons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les racines de Q

et $m_1, m_2, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

On pose $F = \dfrac{P}{Q}$.

On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\pi \sum_{k/\operatorname{Im}\alpha_k > 0} \operatorname{Res}(F, \alpha_k)$.

Preuve :

$$F = \frac{\lambda_{1,1}}{X - \alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X - \alpha_1)^{m_1}} + \ldots$$

$$\alpha = u + \mathrm{i}v \qquad \frac{1}{t - \alpha} = \frac{t - u + \mathrm{i}v}{(t-u)^2 + v^2} \longrightarrow \text{primitive de } \frac{1}{t-\alpha} \qquad \ln\left[(t-u)^2 + v^2\right] + \mathrm{i}\operatorname{Arctan}\frac{t-u}{v}$$

Comme $\deg Q \geqslant \deg P + 2$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Res}(F, \alpha_k)}{t - \alpha_k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{X \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, \alpha_k) \int_{-X}^{X} \frac{\mathrm{d}t}{t - \alpha_k} \right)$$

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{\mathrm{d}t}{t - \alpha} = \mathrm{i}\pi \operatorname{sgn}(v)$$

De plus $\displaystyle\lim_{|t| \to +\infty} \left[t \frac{P(t)}{Q(t)} \right] = 0$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F, \alpha_k) = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(v_k)\operatorname{Res}(\mathrm{F},\alpha_k)$$

$$= \mathrm{i}\pi \left(\sum_{k/\operatorname{Im}\alpha_k>0} \operatorname{Res}(\mathrm{F},\alpha_k) - \sum_{k/\operatorname{Im}\alpha_k<0} \operatorname{Res}(\mathrm{F},\alpha_k) \right)$$

$$= 2\mathrm{i}\pi \sum_{k/\operatorname{Im}\alpha_k>0} \operatorname{Res}(\mathrm{F},\alpha_k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^n+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \text{ pour } n \text{ pair}$$