T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 26 mai 2023

50 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère l'équation différentielle $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ $\quad(\mathrm{E})$.
On précise que la variable est notée x.

1°) Vérifier que la fonction $u : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

………

………

………

………

………

………

2°) Résoudre au brouillon l'équation différentielle $y'+y=0$ $\quad(\mathrm{E}_0)$.
En déduire toutes les solutions de (E). On complètera directement, avec précision, la phrase suivante.

Les solutions de (E) sont les fonctions ……………………………………………………………………

Dans les exercices **II** à **VI**, on note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire considérée.
Pour une variable aléatoire X, son espérance mathématique est notée $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et sa variance est notée $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

On dispose d'une urne contenant des boules de deux couleurs indiscernables au toucher : 10 boules blanches et 3 boules noires.
On tire simultanément trois boules au hasard dans l'urne et on regarde combien de boules blanches ont été tirées.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans le tirage.

1°) Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de X.
On effectuera les calculs au brouillon et on écrira les probabilités sous la forme de fractions irréductibles.

a	0	1	2	3
$P(\mathrm{X}=a)$				

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

………… …………

III. (2 points : 1°) 0 point ; 2°) 1 point + 1 point)

Un trader a analysé plusieurs scénarios concernant l'évolution aléatoire de deux actions notées A et B.
On note X et Y les variables aléatoires égales à l'évolution en euro respectivement des actions A et B.
Les lois de probabilité de X et de Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

a	– 50	0	10	40
$P(\mathrm{X}=a)$	0,1	0,3	0,5	0,1

a	– 30	10	30
$P(\mathrm{Y}=a)$	0,3	0,4	0,3

Vérifier au brouillon que $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

Pour la suite, on pourra utiliser directement les résultats suivants : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=444$; $\mathrm{V}(\mathrm{Y})=564$.

On admettra également que X et Y sont indépendantes.

Le trader possède 10 actions A et 20 actions B. On note G son gain algébrique en euro.

1°) Exprimer G en fonction de X et Y.

…………………… (une seule égalité)

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

………………… …………………

IV. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

Une entreprise de location de voitures dispose de 5 voitures. Elle loue chaque voiture 85 € la journée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures louées durant une journée.
La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

a	0	1	2	3	4	5
$P(\mathrm{X}=a)$	0,08	0,13	0,23	0,31	0,16	0,09

On pourra utiliser directement les résultats suivants : $\mathrm{E}(\mathrm{X})=2{,}61$; $\mathrm{V}(\mathrm{X})=1{,}8379$.

Prénom et nom : ……………………………………………….

1°) On note R la variable aléatoire égale à la recette en euro durant une journée.

Exprimer R en fonction de X. …………. (une seule égalité)

Calculer l'espérance mathématique et la variance de R.

………………… …………………

2°) Dans cette question, on s'intéresse aux locations de voitures durant une semaine complète.
Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant 7$, on note R_i la variable aléatoire égale à la recette en euro à la fin de la i-ième journée de la semaine.
On pose $M = \dfrac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7}{7}$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de M. On donnera la valeur arrondie au millième pour la variance.

………………… …………………

V. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point + 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère n urnes numérotées de 1 à n.
Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, l'urne portant le numéro i contient 1 boule noire et i boules blanches.
On tire au hasard une boule de chaque urne.

1°) Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée de l'urne numéro i est noire et 0 sinon.
Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de X_i.

a	0	1
$P(X_i = a)$		

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X_i en fonction de i.

………… …………

2°) On note X le nombre total de boules noires tirées dans toutes les urnes.

● Exprimer X en fonction de X_1, X_2, …, X_n.

…………………

● En déduire une expression de l'espérance mathématique et de la variance de X sous la forme de sommes en utilisant le symbole Σ.

………………… …………………

• On prend $n = 8$.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Répondre sans égalités en donnant la valeur arrondie au centième.

…… ……

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent à la cantine à l'un ou l'autre des deux services avec une probabilité égale de manger au premier ou au second service.
Chaque personne mange exactement une fois.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre minimal de couverts que le gérant devra prévoir à chacun des deux services pour que la probabilité d'en avoir suffisamment soit supérieure ou égale à 0,95.
Pour cela, on commence par numéroter les 500 personnes de 1 à 500 dans l'ordre alphabétique et pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant 500$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ième personne choisit le premier service (avec probabilité $\dfrac{1}{2}$) et 0 sinon.

Les X_i sont donc des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On admettra qu'elles sont mutuellement indépendantes.

1°) On note S le nombre de personnes déjeunant au premier service.

On a $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=500} \mathrm{X}_i$.

Compléter la phrase suivante :

S suit la loi ………………. de paramètres ……………………………………………………………………..

2°) En observant que le nombre de personnes déjeunant au deuxième service est égal à $500 - \mathrm{S}$ (puisque l'on a supposé que chaque personne mange exactement une fois), démontrer que le problème revient à déterminer le plus petit entier naturel k tel que $P(500 - k \leqslant \mathrm{S} \leqslant k) \geqslant 0{,}95$ puis répondre au problème posé à l'aide de la calculatrice.

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé de l'interrogation écrite du 26-5-2023

I.

On considère l'équation différentielle $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ (E).
On précise que la variable est notée *x*.

1°) Vérifier que la fonction $u : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$ (formule de dérivation d'un produit)

$= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$ (il est inutile de factoriser pour la suite)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x} - \cancel{x\mathrm{e}^{-x}} + \cancel{x\mathrm{e}^{-x}}$

$= \mathrm{e}^{-x}$

On en déduit que *u* est une solution (particulière) de (E).

2°) Résoudre au brouillon l'équation différentielle $y'+y=0$ (E_0).
En déduire toutes les solutions de (E). On complètera directement, avec précision, la phrase suivante.

Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

(E_0) est équivalente à $y' = -y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$ [théorème du cours donnant les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$].

(E) est une équation différentielle de la forme $y'+ay=b(x)$ où *a* est un réel et *b* une fonction.

(E_0) est l'équation homogène associée à (E).

D'après la question 1°), *u* est une solution particulière de (E).

On sait que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée (propriété du cours).

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Dans le supérieur, on verra une méthode de résolution efficace de (E) : la « variation de la constante ».

Dans les exercices **II** à **VI**, on note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire considérée.
Pour une variable aléatoire X, son espérance mathématique est notée $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et sa variance est notée $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

II.

On dispose d'une urne contenant des boules de deux couleurs indiscernables au toucher : 10 boules blanches et 3 boules noires.
On tire simultanément trois boules au hasard dans l'urne et on regarde combien de boules blanches ont été tirées.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans le tirage.

1°) Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de X.
On effectuera les calculs au brouillon et on écrira les probabilités sous la forme de fractions irréductibles.

a	0	1	2	3
$P(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{286}$	$\frac{15}{143}$	$\frac{1}{286}$	$\frac{60}{143}$

L'urne contient 13 boules au total.

L'univers des possibles est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi toutes les boules de l'urne (ensemble des tirages simultanés de 3 boules de l'urne).

Le nombre total de tirages est donc égal au nombre de combinaisons de 3 éléments pris parmi 13 : $\binom{13}{3}=286$.

On peut utiliser la calculatrice ou effectuer le calcul « à la main » (très simple à faire en utilisant la méthode classique de calcul d'un coefficient binomial : $\binom{13}{3}=\dfrac{13\times12\times11}{1\times2\times3}=\ldots$).

Comme on effectue un tirage simultané, on utilise les combinaisons.

On adopte le modèle d'équiprobabilité, c'est-à-dire que la probabilité P qui modélise l'expérience aléatoire est la probabilité uniforme.

X : nombre de boules blanches dans le tirage

Les valeurs que peut prendre X sont 0, 1, 2, 3.

Pour les calculs des probabilités, on utilise les règles de dénombrement.

$$P(\mathrm{X}=0)=\frac{\binom{10}{0}\times\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{1\times1}{\binom{13}{3}}=\frac{1}{\binom{13}{3}}=\frac{1}{286}$$

$$P(\mathrm{X}=1)=\frac{\binom{10}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{13}{3}}=\frac{10\times3}{\binom{13}{3}}=\frac{30}{286}=\frac{15}{143}$$ (on choisit 1 boule parmi les 10 boules blanches puis 2 boules parmi les 3 boules noires)

$$P(\mathrm{X}=2)=\frac{\binom{10}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{13}{3}}=\frac{\binom{10}{2}\times3}{\binom{13}{3}}=\frac{135}{286}$$

$$P(\mathrm{X}=3)=\frac{\binom{10}{3}\times\binom{3}{0}}{\binom{13}{3}}=\frac{\binom{10}{3}\times1}{\binom{13}{3}}=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{120}{286}=\frac{60}{143}$$

Pour certains coefficients binomiaux, on peut donner directement leur valeur grâce à des propriétés du cours (« 0 parmi *n* », « 1 parmi *n* », « propriété de symétrie »).
Pour les autres, on peut les calculer à la main ou avec la calculatrice.

Il ne s’agit pas d’une loi binomiale.

Pour les calculs de la question 2°), on peut garder les probabilités avec le dénominateur 286.

a	0	1	2	3
$P(\mathrm{X}=a)$	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{1}{286}$	$\frac{120}{286}$

2°) Calculer l’espérance mathématique et la variance de X.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{30}{13}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{75}{169}$$

$$E(X)=0\times\frac{1}{286}+1\times\frac{30}{286}+2\times\frac{135}{286}+3\times\frac{120}{286}$$

$$=\frac{30+270+360}{286}$$

$$=\frac{660}{286}$$

$$=\frac{30}{13}$$

Pour le calcul de la variance, on peut soit utiliser la formule de définition soit utiliser la formule de König-Huygens (calculs plus simples).

- avec la définition (à éviter, car les calculs sont beaucoup plus longs)

$$V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

$$=\left(0-\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{1}{286}+\left(1-\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{30}{286}+\left(2-\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{135}{286}+\left(3-\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{120}{286}$$

$$=\left(-\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{1}{286}+\left(-\frac{17}{13}\right)^2\times\frac{30}{286}+\left(-\frac{4}{13}\right)^2\times\frac{135}{286}+\left(-\frac{9}{13}\right)^2\times\frac{120}{286}$$

$$=\left(\frac{30}{13}\right)^2\times\frac{1}{286}+\left(\frac{17}{13}\right)^2\times\frac{30}{286}+\left(\frac{4}{13}\right)^2\times\frac{135}{286}+\left(\frac{9}{13}\right)^2\times\frac{120}{286}$$

$$==\frac{1}{13^2\times286}\left(30^2+17^2\times30+4^2\times135+9^2\times120\right)$$

$$=\frac{75}{169}$$

- avec la formule de König-Huygens

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$$

$$= 0^2 \times \frac{1}{286} + 1^2 \times \frac{30}{286} + 2^2 \times \frac{135}{286} + 3^2 \times \frac{120}{286} - \left(\frac{30}{13}\right)^2$$

$$= \frac{30}{286} + 4 \times \frac{135}{286} + 9 \times \frac{120}{286} - \frac{900}{169}$$

$$= \frac{1650}{286} - \frac{900}{169}$$

$$= \frac{825}{143} - \frac{900}{169}$$

$$= \frac{825}{1859}$$

$$= \frac{75}{169}$$

On vérifie les deux résultats grâce aux commandes de la calculatrice permettant de calculer la moyenne et la variance d'une série statistique.

III.

Un trader a analysé plusieurs scénarios concernant l'évolution aléatoire de deux actions notées A et B.
On note X et Y les variables aléatoires égales à l'évolution en euro respectivement des actions A et B.
Les lois de probabilité de X et de Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

a	– 50	0	10	40
$P(\mathrm{X} = a)$	0,1	0,3	0,5	0,1

a	– 30	10	30
$P(\mathrm{Y} = a)$	0,3	0,4	0,3

Vérifier au brouillon que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

Pour la suite, on pourra utiliser directement les résultats suivants : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 444$; $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = 564$.

On admettra également que X et Y sont indépendantes.

Le trader possède 10 actions A et 20 actions B. On note G son gain algébrique en euro.

On a $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 4$ (calculs très simples).

1°) Exprimer G en fonction de X et Y.

$$\mathrm{G} = 10\mathrm{X} + 20\mathrm{Y}$$

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

$\mathrm{E}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}(10\mathrm{X} + 20\mathrm{Y})$

$= 10\mathrm{E}(\mathrm{X}) + 20\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ (propriété de linéarité de l'espérance)

$= 10 \times 4 + 20 \times 4$

$= 120$

On peut dire que le trader a une espérance de gain de 120 €.

Il faut se référer à l'interprétation de l'espérance d'une variable aléatoire rappelé dans l'encadré ci-dessous :

> L'espérance d'une variable aléatoire X s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

$\mathrm{V}(\mathrm{G}) = \mathrm{V}(10\mathrm{X} + 20\mathrm{Y})$

$= 10^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X}) + 20^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{Y})$ (propriété du cours applicable car X et Y sont indépendantes donc 10X et 20Y le sont aussi)

$= 10^2 \times 444 + 20^2 \times 564$

$= 270000$

On peut remarquer que $\mathrm{V}(\mathrm{X}) < \mathrm{V}(\mathrm{Y})$.
Pour un investisseur, l'action A présente donc moins de risque que l'action B (autrement dit, l'action A est la moins volatile de deux). S'il devait en choisir une seule parmi les deux, il vaudrait mieux que ce soit l'action A.

> Une version plus rigoureuse de l'exercice consisterait à numéroter les actions A de 1 à 10 et les actions B de 1 à 20 puis d'introduire des variables aléatoires X_1, X_2, …, X_{10} et Y_1, Y_2, …, Y_{20} donnant l'évolution des actions A et B.
> Les X_i sont des copies de la variables aléatoire X et les Y_i sont des copies de la variable aléatoire Y.

IV.

Une entreprise de location de voitures dispose de 5 voitures. Elle loue chaque voiture 85 € la journée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures louées durant une journée.
La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

a	0	1	2	3	4	5
$P(\mathrm{X} = a)$	0,08	0,13	0,23	0,31	0,16	0,09

On pourra utiliser directement les résultats suivants : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2{,}61$; $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 1{,}8379$.

1°) On note R la variable aléatoire égale à la recette en euro durant une journée.

Exprimer R en fonction de X. $\mathrm{R} = 85\mathrm{X}$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de R.

On applique les formules donnant l'espérance et la variance pour l'image d'une variable aléatoire par une fonction affine (voir encadré plus loin).

$\mathrm{E}(\mathrm{R}) = 85 \times \mathrm{E}(\mathrm{X})$

$= 85 \times 2{,}61$ (on utilise la valeur de l'espérance fournie dans l'énoncé)

$= 221{,}85$

$\mathrm{V}(\mathrm{R}) = 85^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X})$

$= 85^2 \times 1{,}8379$ (on utilise la valeur de la variance fournie dans l'énoncé)

$= 13278{,}8275$

Il s'agit chaque fois des valeurs exactes (ce sont des nombres décimaux).

On applique la propriété suivante pour l'image d'une variable aléatoire par une fonction affine (ou effet d'une fonction affine sur une variable aléatoire) :

X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P).
a et b sont deux réels (ce sont des coefficients constants).
On pose $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$.
Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé (Ω, P).
On a :

- $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$ (linéarité de l'espérance)
- $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$
- $\sigma(\mathrm{Y}) = |\,a\,|\sigma(\mathrm{X})$

2°) Dans cette question, on s'intéresse aux locations de voitures durant une semaine complète.
Pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant 7$, on note R_i la variable aléatoire égale à la recette en euro à la fin de la i-ième journée de la semaine.
On pose $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_4 + \mathrm{R}_5 + \mathrm{R}_6 + \mathrm{R}_7}{7}$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de M. On donnera la valeur arrondie au millième pour la variance.

$(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \mathrm{R}_4, \mathrm{R}_5, \mathrm{R}_6, \mathrm{R}_7)$ est un échantillon de taille 7 de la loi de R.

M est la moyenne de cet échantillon (autre notation possible à la place de M : $\overline{\mathrm{R}}$; attention, la notation désigne une moyenne et non un événement contraire).

On applique la propriété du cours pour la moyenne et la variance d'un échantillon.

$\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(\mathrm{R})$ (l'espérance de la moyenne de l'échantillon est égale à l'espérance de R)

$$= 221{,}85$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{R})}{7}$$

$$= \frac{13278{,}8275}{7}$$

Avec la calculatrice, on obtient $\mathrm{V}(\mathrm{M}) = 1896{,}975357...$.

La valeur arrondie au millième de la variance de M est donc égale à 1896,975.

V.

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère *n* urnes numérotées de 1 à *n*.
Pour tout entier naturel *i* tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, l'urne portant le numéro *i* contient 1 boule noire et *i* boules blanches.
On tire au hasard une boule de chaque urne.

1°) Pour tout entier naturel *i* tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée de l'urne numéro *i* est noire et 0 sinon.
Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de X_i.

$$\mathrm{X}_i = \begin{cases} 1 \text{ si la boule tirée de l'urne numéro } i \text{ est noire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On commence par observer que l'urne portant le numéro *i* contient $i+1$ boules au total.

On adopte le modèle d'équiprobabilité, c'est-à-dire que la probabilité *P* qui modélise le tirage aléatoire d'une boule dans l'urne *i* est la probabilité uniforme.

a	0	1
$P(\mathrm{X}_i = a)$	$\dfrac{i}{i+1}$	$\dfrac{1}{i+1}$

On peut observer que $\dfrac{i}{i+1} = 1 - \dfrac{1}{i+1}$.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X_i en fonction de *i*.

On observe que X_i est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i+1}$.

On peut appliquer directement les formules donnant l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire X de Bernoulli de paramètre p :
$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p$; $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p(1-p)$ ou $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = pq$ avec $q = 1-p$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \frac{1}{i+1}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_i) = \frac{1}{i+1} \times \frac{i}{i+1}$$

$$= \frac{i}{(i+1)^2}$$

2°) On note X le nombre total de boules noires tirées dans toutes les urnes.

• Exprimer X en fonction de X_1, X_2, …, X_n.

X_1 prend la valeur 1 si la boule tirée de l'urne 1 est noire et la valeur 0 si la boule tirée de l'urne 1 est blanche.
X_2 prend la valeur 1 si la boule tirée de l'urne 2 est noire et la valeur 0 si la boule tirée de l'urne 2 est blanche.
$\vdots$
X_n prend la valeur 1 si la boule tirée de l'urne n est noire et la valeur 0 si la boule tirée de l'urne n est blanche.

De manière évidente, on a donc :
$$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{X}_i \,.$$

• En déduire une expression de l'espérance mathématique et de la variance de X sous la forme de sommes en utilisant le symbole Σ.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1}$$

Comme les tirages dans chaque urne constituent des expériences aléatoires indépendantes, les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont mutuellement indépendantes. La variance de X est donc égale à la somme des variances (propriété du cours).

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{V}(\mathrm{X}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{(i+1)^2}$$

Remarque : Dans le supérieur, on pourra démontrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et que $\mathrm{V}(\mathrm{X}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

• On prend $n = 8$.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
Répondre sans égalités en donnant la valeur arrondie au centième.

1,83 1,29

On peut utiliser la commande somme de la calculatrice pour calculer $\sum_{i=1}^{i=8} \frac{1}{i+1}$ et $\sum_{i=1}^{i=8} \frac{i}{(i+1)^2}$.

$$\sum_{i=1}^{i=8} \frac{1}{i+1} = \frac{4609}{2520}$$

$$\sum_{i=1}^{i=8} \frac{1}{i+1} = 1,8289682539...$$

$$\sum_{i=1}^{i=8} \frac{i}{(i+1)^2} = \frac{8186939}{6350400}$$

$$\sum_{i=1}^{i=8} \frac{i}{(i+1)^2} = 1,289200522...$$

Pour $n = 8$,
- la valeur arrondie au centième de l'espérance mathématique de X est égale à 1,83 ;
- la valeur arrondie au centième de la variance de X est égale à 1,29.

VI.

Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent à la cantine à l'un ou l'autre des deux services avec une probabilité égale de manger au premier ou au second service.
Chaque personne mange exactement une fois.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre minimal de couverts que le gérant devra prévoir à chacun des deux services pour que la probabilité d'en avoir suffisamment soit supérieure ou égale à 0,95.
Pour cela, on commence par numéroter les 500 personnes de 1 à 500 dans l'ordre alphabétique et pour tout entier naturel *i* tel que $1 \leqslant i \leqslant 500$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la *i*-ième personne choisit le premier service (avec probabilité $\frac{1}{2}$) et 0 sinon.

Les X_i sont donc des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On admettra qu'elles sont mutuellement indépendantes.

$$\mathrm{X}_i = \begin{cases} 1 \text{ si la } i\text{-ième personne choisit le premier service} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1°) On note S le nombre de personnes déjeunant au premier service.

On a $S=\sum_{i=1}^{i=500} X_i$.

Compléter la phrase suivante :

S suit la loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=\frac{1}{2}$.

On applique le cours sur la somme de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre.

2°) En observant que le nombre de personnes déjeunant au deuxième service est égal à $500-S$ (puisque l'on a supposé que chaque personne mange exactement une fois), démontrer que le problème revient à déterminer le plus petit entier naturel k tel que $P(500-k\leqslant S\leqslant k)\geqslant 0{,}95$ puis répondre au problème posé à l'aide de la calculatrice.

Le nombre minimal k de couverts que le gérant doit prévoir à chacun des deux services pour avoir une probabilité supérieure à 0,95 est tel que $P\big((S\leqslant k)\cap(500-S\leqslant k)\big)\geqslant 0{,}95 \quad (1)$.

On chercher l'intersection des événements $(S\leqslant k)$ et $(500-S\leqslant k)$.

L'inégalité $500-S\leqslant k$ est équivalente à $500-k\leqslant S$.

On distingue deux cas :

1^{er} cas : $500-k>k$ soit $k<250$

Dans ce cas, $(S\leqslant k)\cap(500-S\leqslant k)=\varnothing$ (autrement dit, les événements $(S\leqslant k)$ et $(500-S\leqslant k)$ sont incompatibles).

On a alors $P\big((S\leqslant k)\cap(500-S\leqslant k)\big)=0$ et l'inégalité (1) n'est pas vérifiée.

2^{e} cas : $500-k\leqslant k$ soit $k\geqslant 250$

Dans ce cas, on a $(S\leqslant k)\cap(500-S\leqslant k)=(500-k\leqslant S\leqslant k)$.

On cherche donc le plus petit entier naturel k tel que $P(500-k\leqslant S\leqslant k)\geqslant 0{,}95$.

Avec la calculatrice (par essais successifs), on trouve $k=272$ (car $P(500-272\leqslant S\leqslant 272)\geqslant 0{,}95$).
On peut observer que la fonction $k\mapsto P(500-k\leqslant S\leqslant k)$ est croissante sur l'ensemble $[\![250\,;500]\!]$ (intervalle d'entiers).

Pour $k=271$, on trouve $P(500-k\leqslant S\leqslant k)=P(500-271\leqslant S\leqslant 271)=P(229\leqslant S\leqslant 271)=0{,}945630978...$.

Pour $k=272$, on trouve $P(500-k\leqslant S\leqslant k)=P(500-272\leqslant S\leqslant 272)=P(228\leqslant S\leqslant 272)=0{,}955936528...$.

Le gérant devra donc prévoir au minimum 272 couverts à chacun des deux services pour que la probabilité d'en avoir suffisamment (c'est-à-dire que chacun puisse manger au service ce son choix) soit supérieure ou égale à 0,95.

En acceptant les 5% de risque, il y a moyen de réaliser une économie considérable en place et en mobilier.

La situation de cet exercice avait déjà été vue dans le contrôle du 18-1-2023 avec d'autres questions.