T
exp

Interrogation écrite du jeudi 25 mai 2023 (30 minutes)

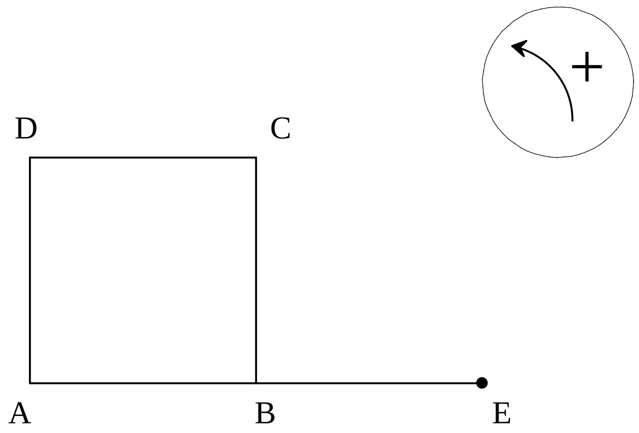
Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1 point par réponse)

On se place dans le plan orienté et on considère un carré ABCD direct. Soit E le symétrique de A par rapport à B.



Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$.

On rappelle que $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ dans cet ordre.

On rappelle qu'il s'agit de l'angle orienté formé par les demi-droites $[DA)$ et $[DB)$ dans cet ordre.

$\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$:	$\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right)$:	$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$:

Écrire les mesures sur les figures données sur la feuille annexe.

II. (2 points)

On pose $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Parmi les nombres suivants, entourer tous ceux qui sont des arguments de z.

$$\frac{17\pi}{3} \qquad \frac{5\pi}{3} \qquad \frac{100\pi}{3} \qquad -\frac{100\pi}{3} \qquad \frac{2023\pi}{3} \qquad -\frac{2023\pi}{3}$$

III. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On pose $z_1 = 3 - (2+i)^2$, $z_2 = (i-1)^2(i+1)^3$, $z_3 = 1 + i^3$.
Déterminer une écriture exponentielle de z_1, z_2, z_3.

$z_1 = \dots\dots\dots$ $\qquad$ $z_2 = \dots\dots\dots$ $\qquad$ $z_3 = \dots\dots\dots$

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

On pose $z=(1+\mathrm{i})^n(1-\mathrm{i})^p$ où n et p sont deux entiers relatifs.
On détaillera la démarche pour résoudre les deux questions au verso de la feuille annexe.

Déterminer un argument de z en fonction de n et p. ....

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n et p pour que z soit un réel.

$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ ....

Dans les exercices **V** et **VI**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On note également U, V, U', V' les points de P d'affixes respectives 1, i, – 1, – i.

V. (4 points : 2 points + 2 points)

On pose $P^*=P\setminus\{\mathrm{O}\}$ et on considère l'application F de P^* dans P qui à tout point M distinct de O, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$.

Soit M un point quelconque de Γ. On note θ une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.
L'affixe de M est donc $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Calculer l'affixe z' de M' en fonction de θ sous la forme la plus simple possible sans exponentielle.
En déduire l'image Γ' de Γ par F.

....

....

....

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Soit M un point quelconque de P distinct de U et U'. On note z son affixe.

Compléter l'égalité suivante : $(\overrightarrow{\mathrm{MU}}, \overrightarrow{\mathrm{MU'}})=\arg$................. (2π)

2°) On note E l'ensemble des points M de P distincts de U et U', d'affixe z, tels que $\arg\dfrac{z+1}{z-1}=-\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
Déterminer et tracer l'ensemble E sur le graphique donné sur la feuille annexe.

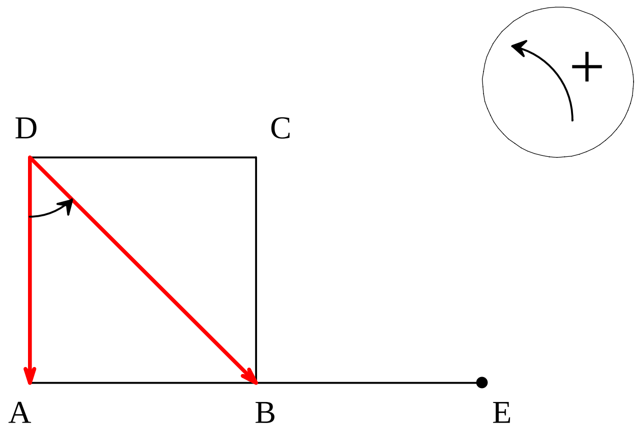
....

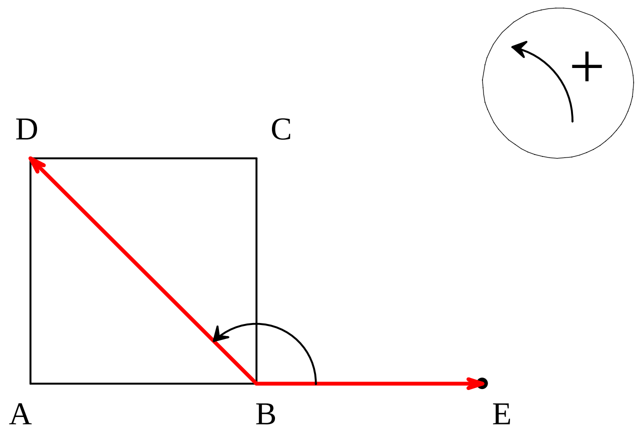
....

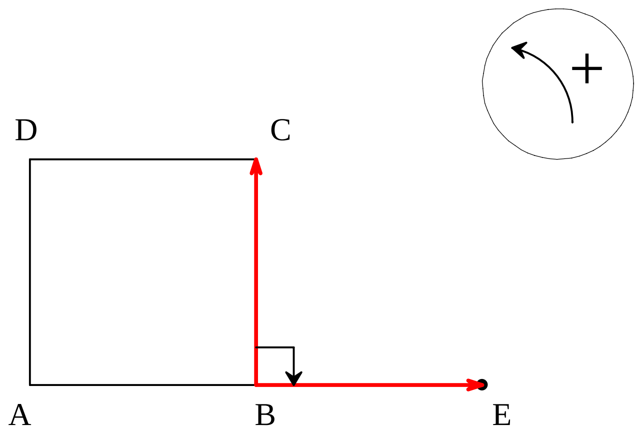
Feuille annexe

Prénom et nom : …………………………………………………

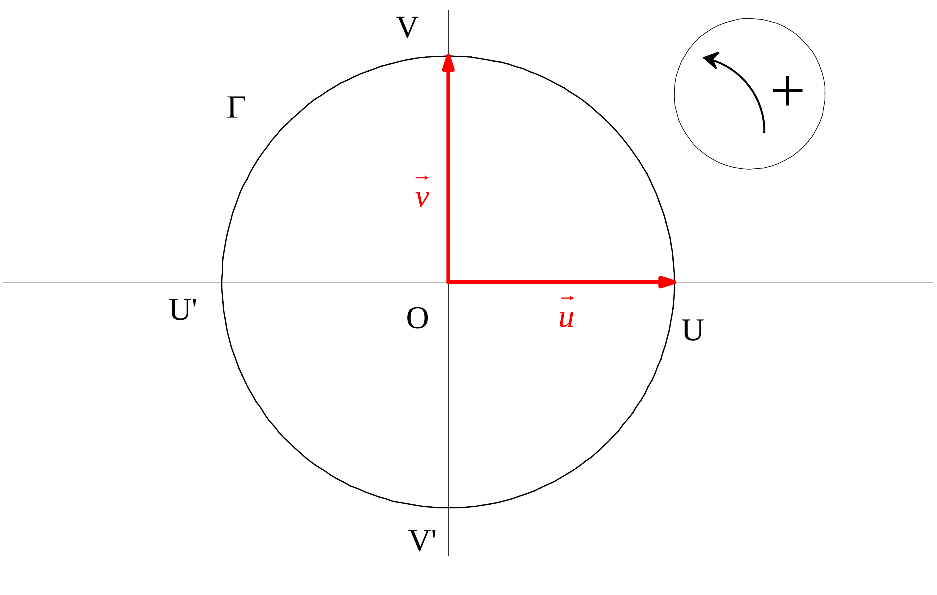
I.







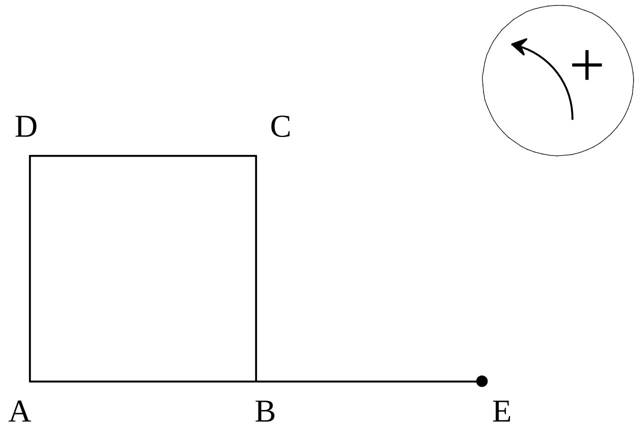
VI. 2°)



Corrigé de l'interrogation écrite du 25-5-2023

I.

On se place dans le plan orienté et on considère un carré ABCD direct. Soit E le symétrique de A par rapport à B.



Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$.

On rappelle que $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ dans cet ordre.

On rappelle qu'il s'agit de l'angle orienté formé par les demi-droites $[DA)$ et $[DB)$ dans cet ordre.

$\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) : \dfrac{\pi}{4}$	$\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right) : \dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right) : -\dfrac{\pi}{2}$

Écrire les mesures sur les figures données sur la feuille annexe.

La mesure principale en radian d'un angle orienté de vecteurs non nuls est la mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

• L'angle géométrique $\widehat{ADB}$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$ rad (45° mais il est inutile de repasser par le degré) car ABCD est un carré et $[BD]$ est une diagonale.

On peut utilise ensuite l'orientation du plan pour dire que $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$.

• L'angle géométrique $\widehat{EBD}$ mesure $\dfrac{3\pi}{4}$ rad. (135° mais il est inutile de repasser par le degré)

On peut utilise ensuite l'orientation du plan pour dire que $\dfrac{3\pi}{4}$ est la mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right)$.

Pour déterminer une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right)$, on peut éventuellement utiliser la relation de Chasles pour les angles orientés ($\left(\vec{u}, \vec{v}\right)+\left(\vec{v}, \vec{w}\right)=\left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ pour tout triplet $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ de vecteurs non nuls).

$$\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$$

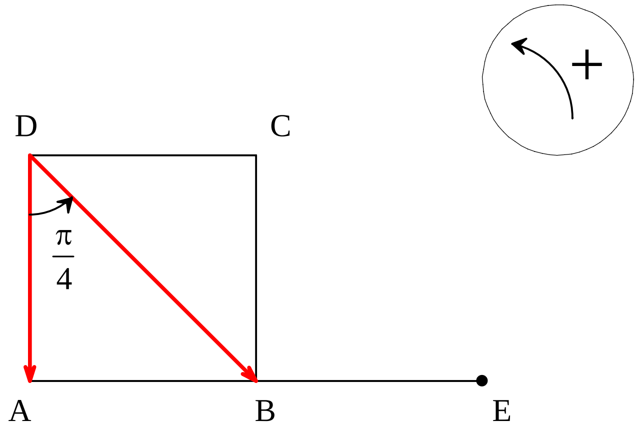
$$\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

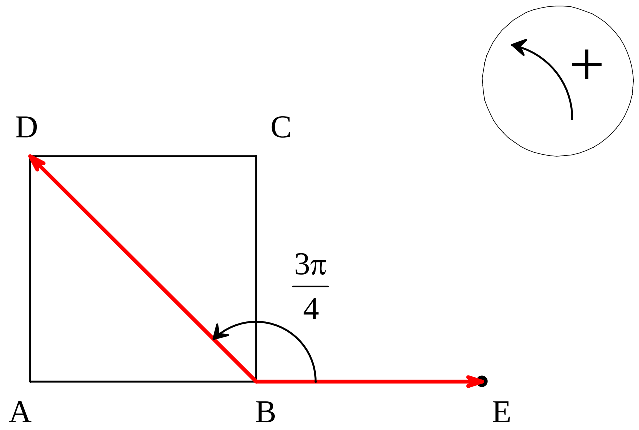
$$\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

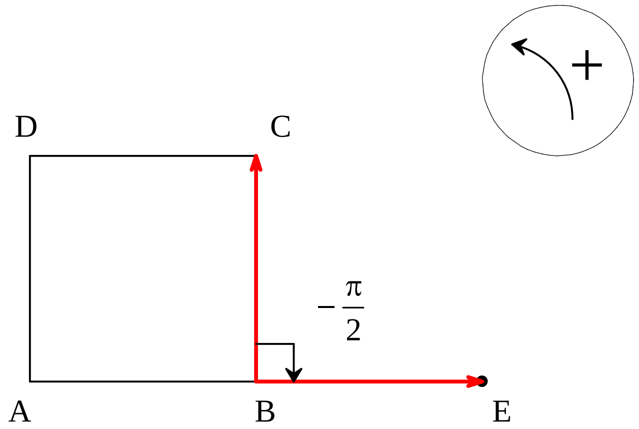
- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$ est un angle droit indirect.

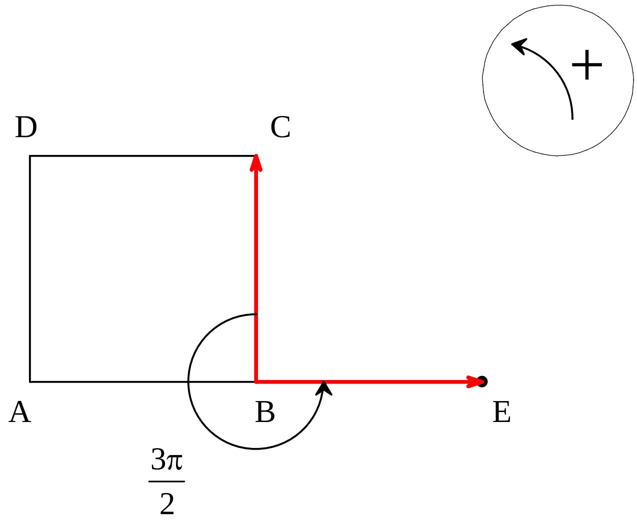
$-\dfrac{\pi}{2}$ est la mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$.

$\dfrac{3\pi}{2}$ est aussi une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$ mais ce n'est pas la mesure principale.









II.

On pose $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Parmi les nombres suivants, entourer tous ceux qui sont des arguments de *z*.

$\frac{17\pi}{3}$ $\quad \frac{5\pi}{3}$ $\quad \frac{100\pi}{3}$ $\quad -\frac{100\pi}{3}$ $\quad \frac{2023\pi}{3}$ $\quad -\frac{2023\pi}{3}$

On commence par déterminer un argument de *z*.
Pour cela, on l'écrit sous forme trigonométrique.

On peut factoriser dès le début par 2 (valeur du module de *z* que l'on peut éventuellement préalablement calculer). Il s'agit d'une factorisation forcée.

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

[$= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ligne facultative]

L'écriture trigonométrique de *z* ainsi obtenue montre que $-\frac{\pi}{3}$ est un argument de *z*.

On peut écrire $\arg z = -\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$.

Les arguments de *z* sont donc tous les réels de la forme $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Autre réponse possible :

Les arguments de *z* sont tous les réels de la forme $\frac{(6k-1)\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On regarde donc parmi les nombres proposés lesquels sont de la forme $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Une méthode consiste à prendre chaque réel proposé, à calculer la différence avec $-\frac{\pi}{3}$ et à regarder si cette différence peut s'écrire sous la forme $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$\frac{17\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{18\pi}{3}=6\pi$$

$$\frac{5\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6\pi}{3}=2\pi$$

$$\frac{100\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{101\pi}{3}$$

101 n'est pas divisible par 3.

$\frac{101\pi}{3}$ ne peut donc pas s'écrire sous la forme $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$-\frac{100\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{99\pi}{3}=-33\pi$$

$$\frac{2023\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2024\pi}{3}$$

2024 n'est pas divisible par 3.

$\frac{2024\pi}{3}$ ne peut donc pas s'écrire sous la forme $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$$-\frac{2023\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2022\pi}{3}=-674\pi$$

III.

On pose $z_1=3-(2+\mathrm{i})^2$, $z_2=(\mathrm{i}-1)^2(\mathrm{i}+1)^3$, $z_3=1+\mathrm{i}^3$.

Déterminer une écriture exponentielle de z_1, z_2, z_3.

$z_1=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\quad$ $z_2=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $z_3=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

On commence par écrire z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.

$z_1 = -4\text{i}$

$z_2 = (\text{i}-1)^2(\text{i}+1)^2 \times (\text{i}+1)$

$= \left[(\text{i}-1)(\text{i}+1)\right]^2 \times (\text{i}+1)$ (astuce de calcul)

$= (-2)^2 \times (\text{i}+1)$

$= 4(\text{i}+1)$

$= 4(1+\text{i})$

$z_3 = 1-\text{i}$

On peut vérifier les résultats grâce à la calculatrice.

$z_1 = -4\text{i}$

$= 4 \times (-\text{i})$

$= 4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ (l'écriture trigonométrique de – i est presque un résultat de cours ; elle peut s'obtenir géométriquement)

$= 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$

$z_2 = 4(1+\text{i})$

$= 4\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \text{i} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

$$z_3 = 1 - \mathrm{i}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

IV.

On pose $z = (1+\mathrm{i})^n (1-\mathrm{i})^p$ où n et p sont deux entiers relatifs.
On détaillera la démarche pour résoudre les deux questions au verso de la feuille annexe.

Déterminer un argument de z en fonction de n et p. $\arg z = (n-p) \times \frac{\pi}{4}$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur n et p pour que z soit un réel.

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n - p$ divisible par 4

$$\arg z = \arg\left[(1+\mathrm{i})^n (1-\mathrm{i})^p\right]$$

$$\arg z = \arg\left[(1+\mathrm{i})^n\right] + \arg\left[(1-\mathrm{i})^p\right]$$

$$\arg z = n\arg(1+\mathrm{i}) + p\arg(1-\mathrm{i})$$

$\arg z = n \times \frac{\pi}{4} + p \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (on utilise les formes exponentielles de $1+\mathrm{i}$ et de $1-\mathrm{i}$ déterminées dans l'exercice **III**)

$$\arg z = \frac{n\pi}{4} - \frac{p\pi}{4}$$

$$\arg z = \frac{(n-p)\pi}{4}$$

2^e^ méthode : On écrit z sous forme exponentielle.

$$z = \left(\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n \left(\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^p$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} \left(\sqrt{2}\right)^p \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{p\pi}{4}}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{n+p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-p)\pi}{4}}$$

z est un nombre complexe non nul.

On utilise la caractérisation des nombres réels (non nuls) à l'aide des arguments.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = 0 \quad (\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-p)\pi}{4} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n - p = 4k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n - p \text{ divisible par } 4$$

Dans les exercices **V** et **VI**, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On note également U, V, U', V' les points de P d'affixes respectives 1, i, – 1, – i.

V.

On pose $P^* = P \setminus \{\mathrm{O}\}$ et on considère l'application F de P^* dans P qui à tout point M distinct de O, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

Soit M un point quelconque de Γ. On note θ une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

L'affixe de M est donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Calculer l'affixe z' de M' en fonction de θ sous la forme la plus simple possible sans exponentielle.
En déduire l'image Γ' de Γ par F.

$$z' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2\mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{(formule d'Euler)}$$

$$= \mathrm{i}\sin\theta$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

L'égalité $z' = \mathrm{i}\sin\theta$ permet d'affirmer que Γ' est le segment $[\mathrm{VV'}]$.

Rappel : Par définition, Γ' est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit Γ.

On pourrait tracer Γ' sur un graphique.

VI.

1°) Soit M un point quelconque de *P* distinct de U et U'. On note *z* son affixe.

Compléter l'égalité suivante : $\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right) = \arg\text{.................}\quad (2\pi)$

$$\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right) = \arg\frac{-1-z}{1-z}\quad (2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right) = \arg\frac{z+1}{z-1}\quad (2\pi)$$

On peut noter que $\left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right) = \left(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{U'M}\right)\quad (2\pi)$ d'après la propriété sur l'angle orienté formé par les opposés de deux vecteurs ($\left(-\vec{u}, -\vec{v}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ pour tout couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ de vecteurs non nuls).

2°) On note *E* l'ensemble des points M de *P* distincts de U et U', d'affixe *z*, tels que $\arg\frac{z+1}{z-1} = -\frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$.
Déterminer et tracer l'ensemble *E* sur le graphique donné sur la feuille annexe.

Soit M un point de *P* d'affixe *z* distinct de U et U' (donc $z \neq 1$ et $z \neq -1$).

$$M \in E \Leftrightarrow \arg\frac{z+1}{z-1} = -\frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$$

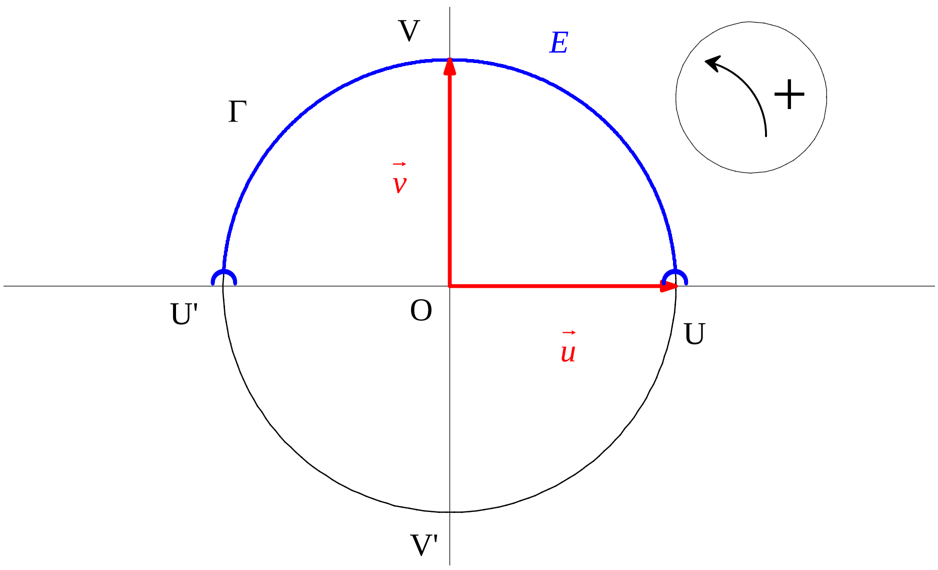
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MU}, \overrightarrow{MU'}\right) = -\frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$$

On reconnaît un ensemble de référence en lien avec la propriété de l'angle droit inscrit dans un cercle.

On peut répondre de deux manières :

E est le demi-cercle de diamètre $[UU']$ contenant le point V, privé des points U et U'.

E est le demi-cercle de diamètre $[UU']$ situé au-dessus de l'axe des réels, privé des points U et U'.



On peut éventuellement placer des points M_1, M_2, M_3… sur ce demi-cercle pour voir que les angles orientés $\left(\overrightarrow{M_1U}, \overrightarrow{M_1V}\right)$, $\left(\overrightarrow{M_2U}, \overrightarrow{M_2V}\right)$ $\left(\overrightarrow{M_3U}, \overrightarrow{M_3V}\right)$ … ont tous pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ radian.