T
exp

Devoir pour le jeudi 16 mars 2023

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que u_n est un entier naturel pour tout entier naturel *n*. On ne cherchera pas à l'exprimer en fonction de *n*.

1°) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2°) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
On écrira quatre égalités sur une même ligne sans détailler les calculs.

3°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

4°) Soit *p* et *q* deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
En considérant le produit $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q$, démontrer l'égalité : $u_{p+q} = u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q$.

Vérifier que l'égalité reste vraie pour *p* entier naturel supérieur ou égal à 1 et $q = 0$.

L'égalité $u_{p+q} = u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q$ est donc vraie pour *p* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1 et *q* entier naturel quelconque.

5°) Soit *n* un entier naturel.
À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que :
● si *n* est impair, u_n peut s'écrire comme somme de deux carrés parfaits ;
● si *n* est pair, u_n peut s'écrire comme différence de deux carrés parfaits.

Corrigé du devoir pour le 16-3-2023

1°)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2°)

$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{A}^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

3°) Le but de la question est de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

Les étapes de la récurrence sont données. Il est demandé de compléter les passages manquants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $\mathcal{P}(n)$: « $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ ».

Vérifions que la phrase $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $\mathrm{A}^1 = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Or $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$.

On peut donc écrire $\mathrm{A}^1 = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la phrase $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Considérons un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la phrase $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $\mathrm{A}^k = \begin{pmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} \end{pmatrix}$.

Démontrons qu'alors la phrase $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\mathrm{A}^{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{k+1} &= \mathrm{A}^k \times \mathrm{A} \\
&= \begin{pmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{k+1} + u_k & u_{k+1} \\ u_k + u_{k-1} & u_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi la phrase $\mathcal{P}\ (k+1)$ est vraie.

On en déduit que la phrase $\mathcal{P}\ (n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

3°)

● On suppose que p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

On sait que $\mathrm{A}^p = \begin{pmatrix} u_{p+1} & u_p \\ u_p & u_{p-1} \end{pmatrix}$ et que $\mathrm{A}^q = \begin{pmatrix} u_{q+1} & u_q \\ u_q & u_{q-1} \end{pmatrix}$.

Par produit de ces deux matrices, on obtient $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q = \begin{pmatrix} u_{p+1} \times u_{q+1} + u_p \times u_q & u_{p+1} \times u_q + u_p \times u_{q-1} \\ u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q & u_p \times u_q + u_{p-1} \times u_{q-1} \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, on peut écrire que $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q = \mathrm{A}^{p+q}$ (propriété des puissances de matrices).

Or $\mathrm{A}^{p+q} = \begin{pmatrix} u_{p+q+1} & u_{p+q} \\ u_{p+q} & u_{p+q-1} \end{pmatrix}$ puisque $p+q$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On procède alors par identification des coefficients.

On identifie le coefficient situé sur la 2e ligne et la 1ère colonne.

On peut donc écrire $u_{p+q} = u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q$.

● Vérifions que l'égalité reste vraie pour p entier naturel supérieur ou égal à 1 et $q = 0$.

On sait que $u_0 = 0$ et que et $u_1 = 1$.

De manière évidente, on a bien $u_{p+0} = u_p \times u_{0+1} + u_{p-1} \times u_0$.

5°)

● Soit n un entier naturel quelconque impair.
Démontrons que u_n peut s'écrire comme somme de deux carrés parfaits.

On pose $n = 2k+1$ où k est un entier naturel.

On peut écrire $n = (k+1) + k$.

On applique la relation établie à la question 4°) pour $p = k+1$ et $q = k$.

p est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et q est un entier naturel.

On obtient $u_n = u_{k+1} \times u_{k+1} + u_k \times u_k$ soit $u_n = (u_{k+1})^2 + (u_k)^2$.

Comme u_k et u_{k+1} sont des entiers naturels, on en déduit que u_n est la somme de deux carrés parfaits.

● Soit n un entier naturel quelconque pair.
Démontrons que u_n peut s'écrire comme différence de deux carrés parfaits.

On pose $n=2k$ où k est un entier naturel.

1[er] cas : $k \geqslant 1$

On peut écrire $n=(k+1)+(k-1)$.

On applique la relation établie à la question 4°) pour $p=k+1$ et $q=k-1$.

p est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et q est un entier naturel.

On a $u_n = u_{k+1} \times u_k + u_k \times u_{k-1}$ soit $u_n = u_k \times (u_{k+1} + u_{k-1})$ (factorisation).

D'après la relation de récurrence qui définit la suite (u_n), on a $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ ce qui donne $u_k = u_{k+1} - u_{k-1}$.

On reprend l'égalité $u_n = u_k \times (u_{k+1} + u_{k-1})$ et on remplace u_k par $u_{k+1} - u_{k-1}$.

On obtient $u_n = (u_{k+1} - u_{k-1}) \times (u_{k+1} + u_{k-1})$ soit $u_n = (u_{k+1})^2 - (u_{k-1})^2$ (par identité remarquable).

Comme u_k et u_{k+1} sont des entiers naturels, on en déduit que u_n est la différence de deux carrés parfaits.

2[e] cas : $k=0$

On a $u_0 = 0$ par définition de la suite (u_n).

On peut écrire $u_0 = 0^2 - 0^2$ ou, plus généralement, $u_0 = a^2 - a^2$ où a est un entier naturel quelconque.

On peut vérifier les résultats pour des valeurs particulières de n.

Prenons $n=9$.
On a $u_9 = 34$.
Par ailleurs, $u_4 = 3$ et $u_5 = 5$.
On constate que $u_9 = (u_4)^2 + (u_5)^2$.

Prenons $n=10$.
On a $u_{10} = 55$.
Par ailleurs, $u_6 = 8$ et $u_4 = 3$.
On constate que $u_{10} = (u_6)^2 - (u_4)^2$.