T
exp

Interrogation écrite du jeudi 20 avril 2023 (50 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout entier naturel n on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n\left(x\right)=\cos^n x\sin^{n+2} x+\sin^n x\cos^{n+2} x$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a $f_n\left(x\right)=\dfrac{\sin^n\left(2x\right)}{2^n}$.

2°) Dans cette question, on prend $n=2$. Exprimer $f_2\left(x\right)$ en fonction de $\cos 4x$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.

On donne les vecteurs $\vec{u}\left(\cos^2 a\,;\cos^2 b\,;\cos^2 c\right)$, $\vec{v}\left(\sin^2 a\,;\sin^2 b\,;\sin^2 c\right)$, $\vec{w}\left(\cos 2a\,;\cos 2b\,;\cos 2c\right)$ où a, b, c sont trois réels.

1°) Justifier que le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur constant (dont les coordonnées sont indépendantes de a, b, c).

2°) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

……..

……..

……..

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C.

1°) Existe-t-il un circuit de longueur 3 sur le graphe $\mathcal{G}$? Si oui, écrire un tel circuit. ……………………..…..

2°) Écrire les chemins de longueur 2 partant de A. ……………………..…..

3°) Écrire la matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Les points de collecte d'un camion d'une société spécialisée dans le recyclage du verre ainsi que les liaisons entre ces différents points sont représentés par le graphe non orienté donné sur la feuille annexe. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.
On note M la matrice d'adjacence de ce graphe, en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne sur la feuille annexe la matrice M^4.

● Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en 4 étapes ? …..

● Combien y a-t-il de trajets possibles en quatre étapes partant d'un point et revenant au même point ? …..

2°) Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe donné sur la feuille annexe. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation. Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 et peut sortir par n'importe quel sommet.
Lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

……..

……..

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E.

1°) Compléter la phrase suivante : Le diamètre de $\mathcal{G}$ est égal à …. .

2°) Expliquer pourquoi $\mathcal{G}$ est semi-eulérien et semi-hamiltonien. On répondra par une phrase.

……..

……..

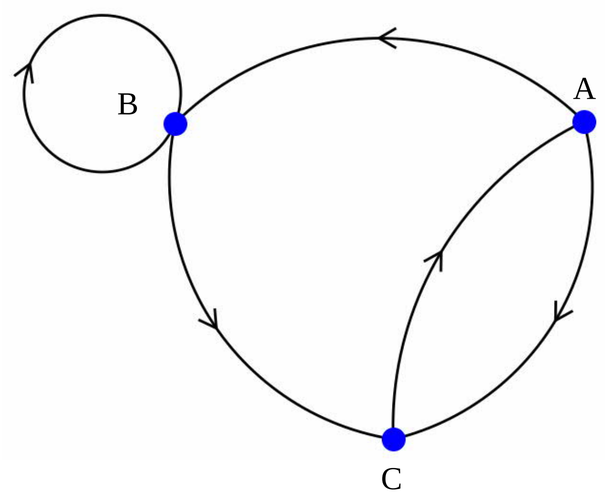
3°) Compléter les phrases suivantes :

Si l'on ajoute une arête entre les sommets … et … , alors on obtient un graphe eulérien.

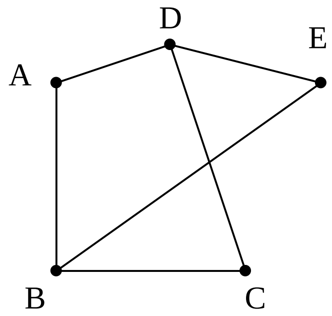
Si l'on ajoute une arête entre les sommets … et … , alors on obtient un graphe hamiltonien.

Feuille annexe (ne rien écrire sur les graphes)

III.

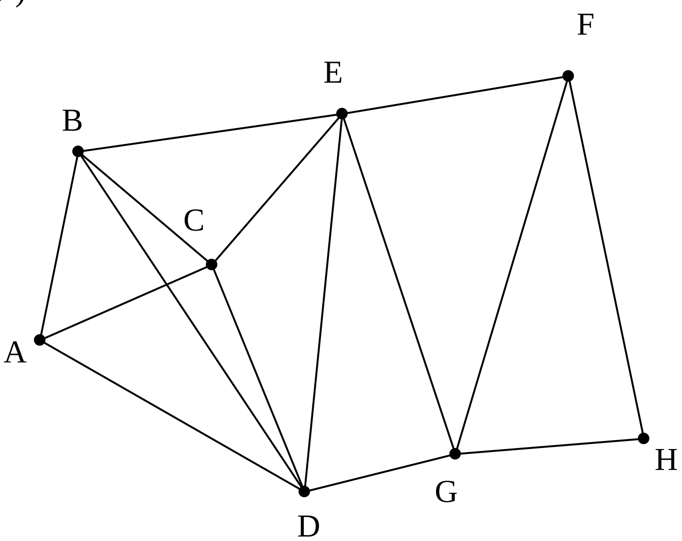


V.



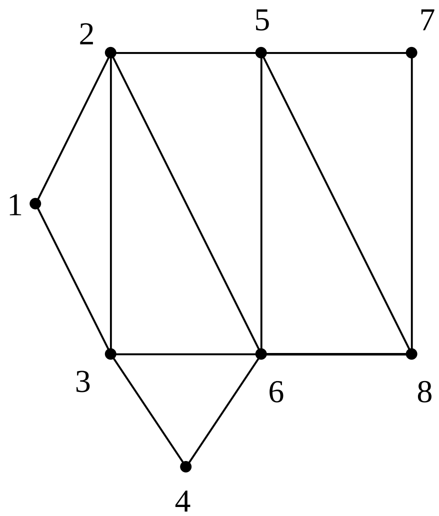
IV.

1°)



$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 24 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

2°)



Rappel important : On ne répond jamais par oui ou non à une question.

Corrigé de l'interrogation écrite du 20-4-2023

I.

À tout entier naturel n on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\cos^n x\sin^{n+2} x+\sin^n x\cos^{n+2} x$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a $f_n(x)=\dfrac{\sin^n(2x)}{2^n}$.

2°) Dans cette question, on prend $n=2$. Exprimer $f_2(x)$ en fonction de $\cos 4x$.

1°) On part de l'expression initiale de $f_n(x)$. On procède par factorisation.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_n(x)=\cos^n x\sin^n x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$$

$$=\cos^n x\sin^n x\times 1$$

$$=(\cos x\sin x)^n$$

$$=\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\sin^n(2x)}{2^n}$$

On utilise la formule de duplication du sinus : $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

2°) On reprend le résultat obtenu à la question précédente.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_2(x)=\frac{\sin^2(2x)}{4}$$

$$=\frac{\frac{1-\cos(2\times 2x)}{2}}{4}$$ (on utilise la formule de linéarisation : $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$ valable pour tout réel t)

$$=\frac{\frac{1-\cos 4x}{2}}{4}$$

$$=\frac{1-\cos 4x}{8}$$

II.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{V}$.

On donne les vecteurs $\vec{u}\left(\cos^2 a\,;\cos^2 b\,;\cos^2 c\right)$, $\vec{v}\left(\sin^2 a\,;\sin^2 b\,;\sin^2 c\right)$, $\vec{w}\left(\cos 2a\,;\cos 2b\,;\cos 2c\right)$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels.

1°) Justifier que le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur constant (dont les coordonnées sont indépendantes de *a*, *b*, *c*).

2°) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

1°) $\vec{u}+\vec{v}\left(\cos^2 a+\sin^2 a\,;\cos^2 b+\sin^2 b\,;\cos^2 c+\sin^2 c\right)$

On utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Ainsi, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;1)$, ce qui montre que le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est constant.

2°) On utilise la formule de duplication du cosinus : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

On a donc $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}\quad (1)$.

L'égalité (1) montre que le vecteur $\vec{w}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

III.

On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C.

1°) Existe-t-il un circuit de longueur 3 sur le graphe $\mathcal{G}$? Si oui, écrire un tel circuit. A-B-C-A

On peut le noter avec des flèches : A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A.

C'est le seul circuit de longueur 3 du graphe $\mathcal{G}$.

On peut l'écrire de diverses manières selon le point d'où l'on part : B-C-A-B ; C-A-B-C.

2°) Écrire les chemins de longueur 2 partant de A. A-B-C ; A-B-B ; A-C-A

3°) Écrire la matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

M est une matrice carrée d'ordre 3.

On peut noter que, comme le graphe $\mathcal{G}$ est orienté, la matrice M n'est pas symétrique.

À l'aide de la matrice M, on peut retrouver le nombre de chemins de longueur 2 partant de A écrits dans la réponse à la question précédente.

Pour cela, on calcule $\mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

La première ligne montre qu'il existe 3 chemins partant du sommet A (somme des coefficients de la première ligne).

IV.

1°) Les points de collecte d'un camion d'une société spécialisée dans le recyclage du verre ainsi que les liaisons entre ces différents points sont représentés par le graphe non orienté donné sur la feuille annexe. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.
On note M la matrice d'adjacence de ce graphe, en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne sur la feuille annexe la matrice M^4.

• Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en 4 étapes ? 9

• Combien y a-t-il de trajets possibles en quatre étapes partant d'un point et revenant au même point ? 314

• Pour déterminer le nombre de trajets possibles permettant d'aller de A à H en 4 étapes, on peut soit écrire tous les chemins possibles (fastidieux) soit utiliser la matrice M^4 (plus simple).

A-D-E-F-H
A-D-E-G-H
A-B-E-F-H
A-B-E-G-H
A-C-E-F-H
A-C-E-G-H
A-B-D-G-H
A-C-D-G-H
A-D-G-F-H

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 24 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de M^4 situé sur la ligne 1 et dans la colonne 8 est égal à 9.

• Pour déterminer le nombre de trajets possibles en quatre étapes partant d'un point et revenant au même point, on additionne tous les coefficients situés sur la diagonale de M^4.

$31+47+47+62+60+21+35+11=314$

Il s'agit des chaînes fermées de longueur 4.

Complément :

La matrice d'adjacence du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le graphe n'est pas orienté. La matrice M est symétrique.

2°) Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe donné sur la feuille annexe. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation. Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 et peut sortir par n'importe quel sommet.
Lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

Il s'agit de voir si le graphe admet une chaîne eulérienne.
On étudie le degré de chaque sommet.

sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
degré	2	4	4	2	4	5	2	3

$\deg(\text{sommet } 1) = 2$

$\deg(\text{sommet } 2) = 4$

$\deg(\text{sommet } 3) = 4$

$\deg(\text{sommet } 4) = 2$

$\deg(\text{sommet } 5) = 4$

$\deg(\text{sommet } 6) = 5$

$\deg(\text{sommet } 7) = 2$

$\deg(\text{sommet } 8) = 3$

Il y a exactement deux sommets de degré impair, à savoir les sommets portant les numéros 6 et 8.
D'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne (entre les sommets 6 et 8) mais pas de cycle eulérien.

Le camion peut parcourir le lotissement avec l'un des chemins suivants :

8-7-5-8-6-5-2-6-3-2-1-3-4-6 ;

8-7-5-8-6-4-3-1-2-3-6-2-5-6 ;

8-7-4-8-6-5-2-6-4-3-1-2-3-6 ;

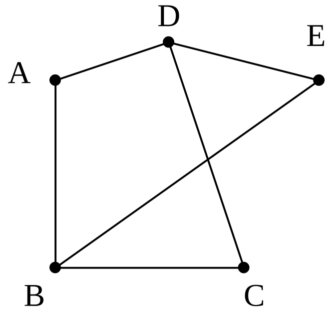
8-5-7-8-6-2-5-6-3-1-2-3-4-6.

V.

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E.

1°) Compléter la phrase suivante : Le diamètre de $\mathcal{G}$ est égal à 2.

Pour déterminer le diamètre de $\mathcal{G}$, on cherche la plus grande distance entre deux sommets distincts de $\mathcal{G}$.



La distance entre B et D est égale à 2.
La distance entre A et C est égale à 2.
La distance entre A et E est égale à 2.
2 est la plus grande distance entre deux sommets de $\mathcal{G}$.
On peut éventuellement utiliser un tableau de distances.

2°) Expliquer pourquoi $\mathcal{G}$ est semi-eulérien et semi-hamiltonien. On répondra par une phrase.

● On étudie les degrés de chaque sommet du graphe de manière à utiliser le théorème d'Euler.

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	3	2	3	2

$\deg A = 2 \quad \deg B = 3 \quad \deg C = 2 \quad \deg D = 3 \quad \deg E = 2$

Il y a exactement deux sommets de degré impair, à savoir B et D.
D'après le théorème d'Euler, $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne (entre B et D) mais pas de cycle eulérien.

● On a bien une chaîne hamiltonienne (A-B-C-D-E, par exemple) sur le graphe, mais pas de cycle hamiltonien.

3°) Compléter les phrases suivantes :

Si l'on ajoute une arête entre les sommets B et D, alors on obtient un graphe eulérien.

Si l'on ajoute une arête entre les sommets C et E, alors on obtient un graphe hamiltonien.

Dans les deux cas, il y a un seul choix possible.

En rajoutant une arête entre les sommets B et D, on a le cycle eulérien : B-C-D-E-B-A-D-B.
On joint les deux sommets de degrés impairs dans le graphe $\mathcal{G}$.

En rajoutant une arête entre les sommets C et E, on a le cycle hamiltonien : A-B-C-E-D-A.

Il n'y a pas de propriété permettant de résoudre la question. On est obligé de tâtonner.