T exp

Interrogation écrite du jeudi 11 mai 2023 (50 minutes)

Numéro : …..	Prénom et nom : ……………………………………………….	Note : ….. / 20

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point + 1 point ; 4°) 2 points)

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E, F, G, H.

1°) Écrire la (ou les) chaîne(s) de longueur minimale d'extrémités A et H passant par C mais pas par F.

………..

2°) Écrire la (ou les) chaîne(s) de longueur minimale d'extrémités E et H passant par B et C.

………..

3°) Déterminer l'excentricité (ou encore l'écartement) des sommets A, B, C dans $\mathcal{G}$.
On remplira les cases de gauche à droite.

….	….	….

4°) Quels sont les centres de $\mathcal{G}$?

……………………

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E, F, G, H. Sur chaque arête figure un poids. On précise que x désigne un réel strictement positif.
Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Pour quelle valeur de x les chaînes A-B-C-G et C-D-E-H-F-B-C ont-elles le même poids ?

………

2°) Dans cette question, on prend $x=1$. Déterminer la (ou les) chaîne(s) de poids minimal reliant A et G.

……………………

3°) Dans cette question, on prend $x=4$. Déterminer la (ou les) chaîne(s) de poids minimal reliant A et G.

……………………

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D.

1°) Écrire dans l'espace vide ci-contre la matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.
On prendra les sommets dans l'ordre alphabétique.

2°) On note I la matrice identité d'ordre 4.
Calculer $X = (I + M)^3$. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il fortement connexe ? Justifier.

………..

………..

IV. (5 points : 1°) 4 points ; 2°) 1 point)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $B(n\,;n)$, $C(n\,;0)$ et $D(0\,;n)$.
Le quadrilatère ACBD est un carré.
À l'aide du quadrillage naturel du plan associé au repère, on trace un graphe non orienté $\mathcal{G}$ représenté par ce carré comme on le voit sur le graphique donné en annexe pour $n = 3$ où les points marqués en gras sont les sommets de ce graphe. Seuls les sommets A, B, C, D ont un nom.

1°) On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Combien $\mathcal{G}$ possède-t-il de sommets ? …….

• Combien $\mathcal{G}$ possède-t-il de sommets de degré 2 ? …….

• Combien $\mathcal{G}$ possède-t-il de sommets de degré 4 ? …….

• Combien $\mathcal{G}$ possède-t-il d'arêtes ? …….

2°) On appelle chaîne minimale entre A et B par rapport au graphe $\mathcal{G}$ toute chaîne d'extrémités A et B de longueur minimale.

Quelle est la longueur d'une chaîne minimale entre A et B ? …….

Question bonus (1 point) : Combien y a-t-il de chaînes minimales entre A et B ? ……..

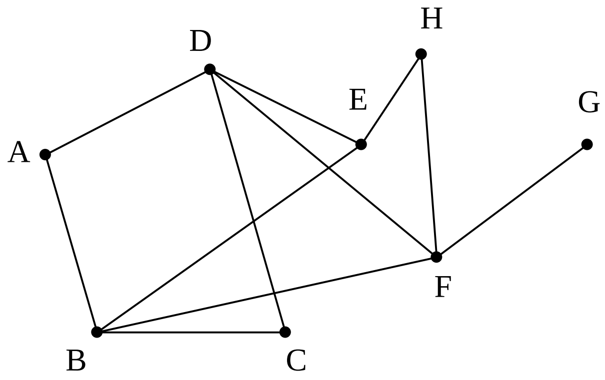
V. (2 points : 1 point + 1 point)

Écrire chacun des nombres complexes $z = 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 2$ et $z' = \dfrac{4}{\mathrm{i}}$ sous forme trigonométrique.

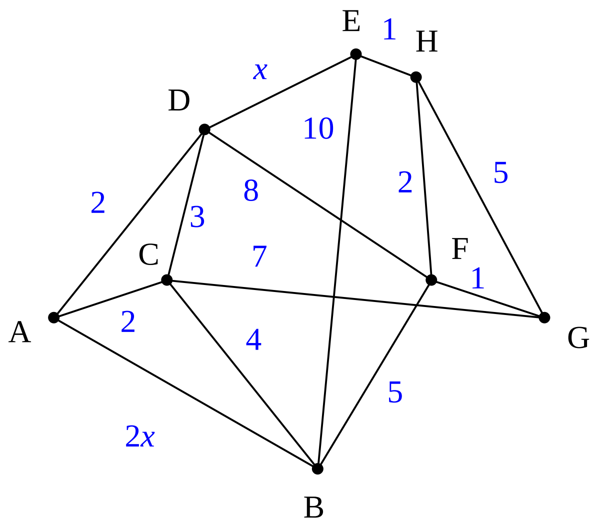
…………………………… ……………………………

Feuille annexe (ne rien écrire sur les graphes)

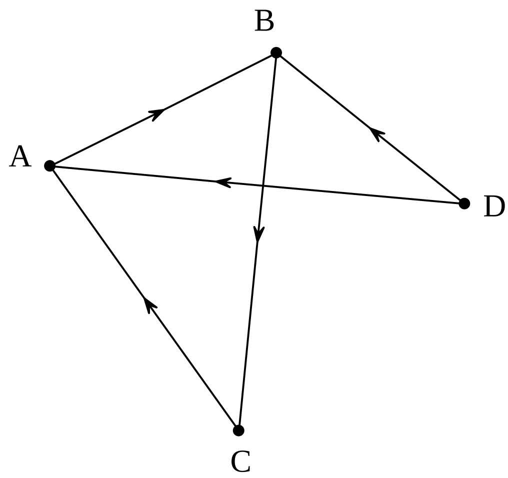
I.



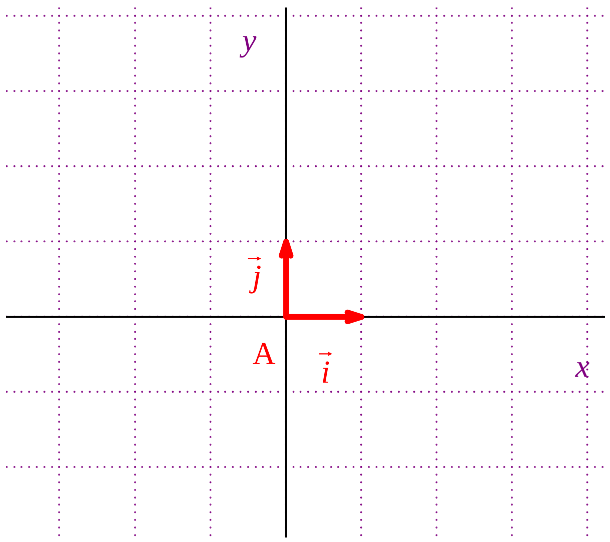
II.

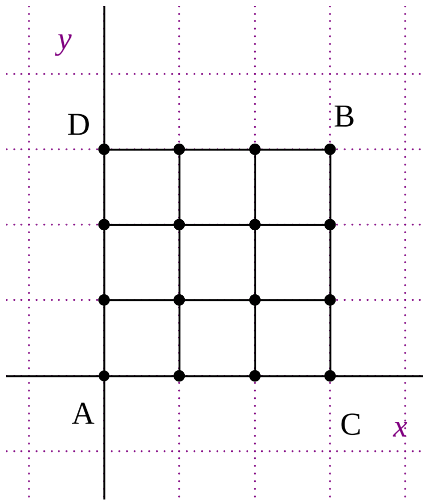


III.



IV.





Conseils que j'aurais dû donner à l'oral

- Écriture d'une chaîne : On écrit les noms des sommets séparées par des tirets.

- On ne répond jamais par oui ou non à une question.

- Pour le graphe pondéré de l'exercice **II**, le poids de l'arête D-F est égal à 8, le poids de l'arête C-G est 7 etc.

Corrigé de l'interrogation écrite du 11-5-2023

I.

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E, F, G, H.

1°) Écrire la (ou les) chaîne(s) de longueur minimale d'extrémités A et H passant par C mais pas par F.

A-B-C-D-E-H A-D-C-B-E-H A-B-C-B-E-H A-D-C-D-E-H

Toutes ces chaînes ont pour longueur 5.

2°) Écrire la (ou les) chaîne(s) de longueur minimale d'extrémités E et H passant par B et C.

E-B-C-D-E-H E-B-C-B-E-H E-B-C-D-F-H E-B-C-B-F-H E-D-C-B-E-H E-D-C-B-F-H

On cherche toutes les chaînes de longueur minimale allant de E à H passant par B et C au moins une fois.

Il y a 6 chaînes satisfaisant la condition. Elles ont toutes pour longueur 5.

3°) Déterminer l'excentricité (ou encore l'écartement) des sommets A, B, C dans $\mathcal{G}$.
On remplira les cases de gauche à droite.

3	2	3

$\text{excentricité}(\text{A}) = 3$

$\text{excentricité}(\text{B}) = 2$

$\text{excentricité}(\text{C}) = 3$

On applique la définition suivante :

L'**excentricité** ou l'**écartement** d'un sommet d'un graphe est la distance maximale existant entre ce sommet et les autres sommets du graphe.

4°) Quels sont les centres de $\mathcal{G}$?

B, D, E, F

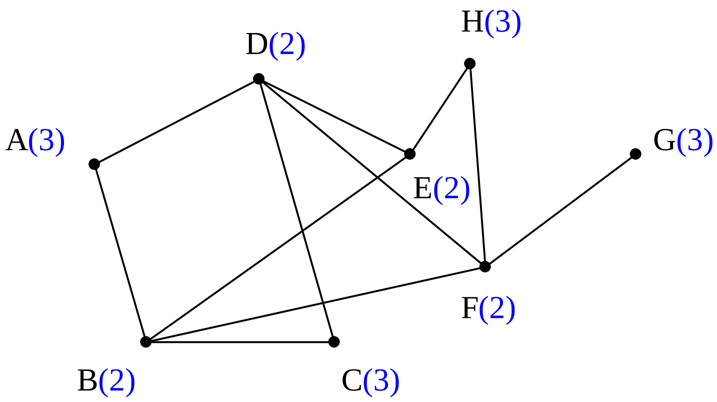
Les centres de $\mathcal{G}$ sont les sommets dont l'excentricité est minimale.

Le rayon de $\mathcal{G}$ est l'excentricité des centres de $\mathcal{G}$. Il est donc égal à 2.

On applique la définition suivante :

On appelle **centres d'un graphe** les sommets d'excentricité minimale.

On détermine donc l'excentricité de chaque sommet.



II.

On considère le graphe non orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D, E, F, G, H. Sur chaque arête figure un poids. On précise que x désigne un réel strictement positif.

Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Pour quelle valeur de x les chaînes A-B-C-G et C-D-E-H-F-B-C ont-elles le même poids ?

$$x = 4$$

Le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe pondéré.

Le poids de la chaîne A-B-C-G est égal à $2x+4+7=2x+11$.

Le poids de la chaîne C-D-E-H-F-B-C est égal à $3+x+1+2+5+4=x+15$.

On résout l'équation $2x+11=x+15 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow x=4$

On peut noter que la chaîne C-D-E-H-F-B-C est en fait un cycle.

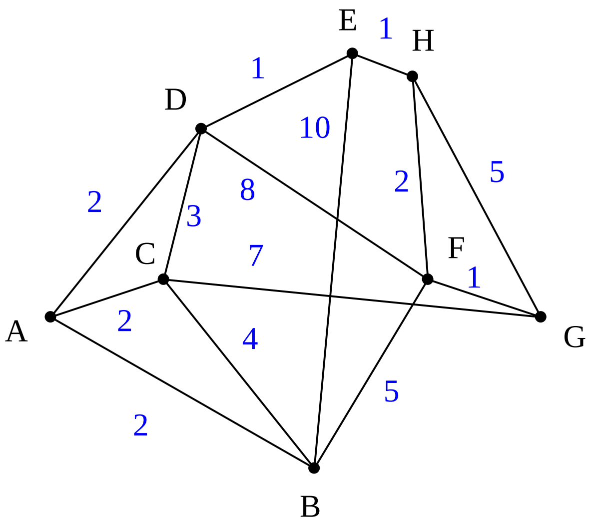
2°) Dans cette question, on prend $x=1$. Déterminer la (ou les) chaîne(s) de poids minimal reliant A et G.

A-D-E-H-F-G

Il y a une seule chaîne de poids minimal reliant A et G.

Elle a pour poids 7.

On peut éventuellement utiliser l'algorithme de Dijkstra.



À l'étape 0, on sélectionne le sommet A (on cherche la chaîne de poids minimal entre A et G).

Étape	**Sommets sélectionnés**	**« Chemins » créés**
0	A	
1	A, B	A-B
2	A, B, C	A-B A-C
3	A, B, C, D	A-B A-C-D
4	A, B, C, D	A-B A-C-D A-D
5	A, B, C, D, E	A-B A-C-D A-D-E
6	…	

À l'étape 1, on a 3 choix possibles de sommets (B, C, D) car les arêtes A-B, A-C, A-D ont toutes le même poids.

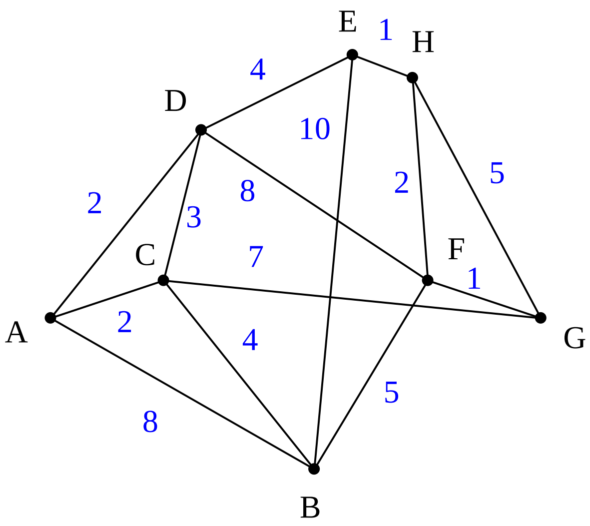
On peut sélectionner B comme sommet. On sera juste obligé de faire des retours en arrière.

3°) Dans cette question, on prend $x = 4$. Déterminer la (ou les) chaîne(s) de poids minimal reliant A et G.

A-C-G

Il y a une seule chaîne de poids minimal reliant A et G.

Elle a pour poids 9.



III.

On considère le graphe orienté $\mathcal{G}$ donné sur la feuille annexe dont les sommets sont notés A, B, C, D.

1°) Écrire dans l'espace vide ci-contre la matrice d'adjacence M de $\mathcal{G}$.
On prendra les sommets dans l'ordre alphabétique.

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

2°) On note I la matrice identité d'ordre 4.
Calculer $X=(I+M)^3$. Le graphe $\mathcal{G}$ est-il fortement connexe ? Justifier.

$$X=\begin{pmatrix}2&3&3&0\\3&2&3&0\\3&3&2&0\\4&6&4&1\end{pmatrix}$$

On a $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ (définition de la matrice identité d'ordre 4) ce qui donne immédiatement :

$I+M=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$.

On calcule ensuite X à l'aide de la calculatrice.

Les coefficients de la matrice X ne sont pas tous strictement positifs donc le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas fortement connexe.
Les coefficients 0 situés sur les trois premières lignes de la dernière colonne de X montrent qu'il n'existe pas de chemins allant de A à D, de B à D, de C à D.
On aurait pu le voir directement sur le graphe puisqu'il n'y a que des arêtes sortantes du sommet D.

Commentaires :

On applique ici une propriété du cours.

L'énoncé fait calculer la matrice X ; il aurait tout aussi bien pu faire calculer la matrice $Y=I+M+M^2+M^3$.

On observe aisément que le graphe $\mathcal{G}$ est faiblement connexe.

IV.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $B(n\,;n)$, $C(n\,;0)$ et $D(0\,;n)$.
Le quadrilatère ACBD est un carré.
À l'aide du quadrillage naturel du plan associé au repère, on trace un graphe non orienté G représenté par ce carré comme on le voit sur le graphique donné en annexe pour $n=3$ où les points marqués en gras sont les sommets de ce graphe. Seuls les sommets A, B, C, D ont un nom.

1°) On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

• Combien G possède-t-il de sommets ? $(n+1)^2$

• Combien G possède-t-il de sommets de degré 2 ? 4

• Combien G possède-t-il de sommets de degré 4 ? $(n-1)^2$

• Combien G possède-t-il d'arêtes ? $2n^2+2n$

Il y a plusieurs manières pour déterminer le nombre d'arêtes de G.

On peut faire un dénombrement direct en comptant le nombre d'arêtes verticales et le nombre d'arêtes horizontales ou bien utiliser la relation liant le nombre d'arêtes d'un graphe et les degrés des sommets (dans ce cas, il ne faut pas oublier qu'il y a des sommets de degré 3).

1ère méthode :

Soit N le nombre d'arêtes de G.

$$N = \underbrace{n\times(n+1)}_{\text{nombre d'arêtes horizontales}} + \underbrace{n\times(n+1)}_{\text{nombre d'arêtes verticales}}$$

$$= 2n(n+1)$$

On peut aussi dire que le nombre d'arêtes horizontales est égal au nombre d'arêtes verticales.

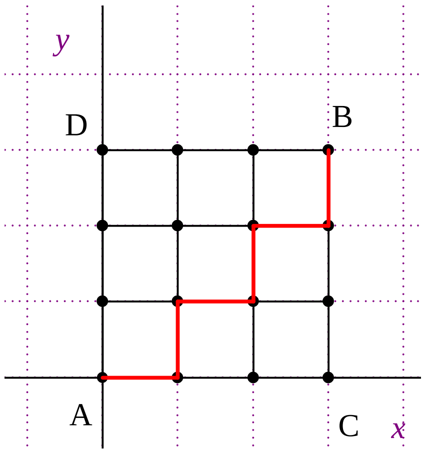
2e méthode :

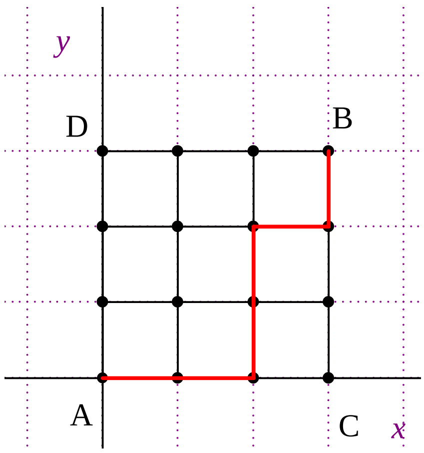
Le nombre de sommets de degré 2 est égal à 4 (il s'agit des sommets A, B, C D du carré).
Le nombre de sommets de degré 3 est égal à $4n-4$.
Le nombre de sommets de degré 4 est égal à $(n-1)^2$.
La somme des degrés de tous les sommets G est donc égale à
$2\times4+3(4n-4)+4(n-1)^2=8+12n-12+4(n^2-2n+1)=4n^2+4n$.
On sait que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes (théorème du cours).
On en déduit que le nombre d'arêtes de G est égal à $\dfrac{4n^2+4n}{2}=2n^2+2n$.

2°) On appelle chaîne minimale entre A et B par rapport au graphe $\mathcal{G}$ toute chaîne d'extrémités A et B de longueur minimale.

Quelle est la longueur d'une chaîne minimale entre A et B ? $2n$

On peut représenter des chaînes minimales entre A et B.





Question bonus : Combien y a-t-il de chaînes minimales entre A et B ?

$$\binom{2n}{n}$$

On utilise le cours sur le dénombrement.
Les chaînes minimales entre A et B comptent tous $2n$ déplacements en partant de A, n vers la droite, n vers le haut.
Une chaîne minimale entre A et B peut être représentée par une liste ordonnée de $2n$ déplacements élémentaires vers le haut (H) ou vers la droite (D) telle que D apparaît exactement n fois.
Par exemple, pour $n = 6$, une chaîne minimale entre A et B peut être codée par (H, D, H, H, D, D, H, H, D, D, D, H).
Pour déterminer une chaîne minimale entre A et B, il suffit de choisir la place des H ou des D.
Le nombre de chaînes minimales entre A et B est donc égal au nombre de combinaisons de n éléments pris parmi $2n$, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

V.

Écrire chacun des nombres complexes $z = 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 2$ et $z' = \dfrac{4}{\mathrm{i}}$ sous forme trigonométrique.

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z' = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

- $z = 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 2$

On peut éventuellement commencer par calculer le module de z.

$$|\, z \,| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 12}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

$z = 4\left(\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ (On met en facteur le module de z que l'on a calculé précédemment)

$= 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (On reconnaît une valeur remarquable pour le cosinus et le sinus)

On a écrit z sous forme trigonométrique faisant apparaître le module et un argument, ce qui permet d'écrire immédiatement z sous forme exponentielle.

- $z' = \dfrac{4}{\mathrm{i}}$

$$z' = \frac{4}{\mathrm{i}}$$

$$= \frac{4 \times \mathrm{i}}{\mathrm{i} \times \mathrm{i}}$$

$$= \frac{4\mathrm{i}}{-1}$$

$$= -4\mathrm{i}$$

$$= 4 \times (-\mathrm{i})$$

$$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

On peut vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.