T exp

Interrogation écrite du jeudi 30 mars 2023 (50 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….…………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 2 points + 2 points)

On applique l'algorithme d'Euclide à deux entiers naturels a et b dont le PGCD est égal à 5, en commençant par la division euclidienne de a par b et en écrivant la dernière division de reste nul.
Les quotients obtenus sont tous égaux à 2.
Dans chaque cas, on demande de déterminer les valeurs de a et b. On répondra par deux égalités sur les pointillés.

1er cas : On suppose que l'algorithme comporte deux divisions euclidiennes.

…………………………

2e cas : On suppose que l'algorithme comporte trois divisions euclidiennes.

…………………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Compléter l'équivalence suivante où a est un entier relatif.

« a est divisible par 20 et par 22 si, et seulement si, a est divisible par ……... . »

Justifier la réponse. On pourra écrire une égalité.

………..

2°) Quel est le plus petit multiple commun à 20 et à 22 supérieur ou égal à 2023 ?

…..…... (une seule réponse sans égalité)

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Appliquer l'algorithme d'Euclide à 390 et 525.

Quels sont les diviseurs positifs communs à 390 et 525 ?

………………… (répondre sans égalité)

IV. (2 points)

Déterminer le PGCD de 3 et de 2^n+2^{n+1} où n est un entier naturel quelconque.
Justifier.

……..

……..

……..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans les deux questions, n désigne un entier relatif quelconque.

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $\text{PGCD}(n\,;n+1)=\ldots\ldots$.

2°) Compléter l'égalité : $\text{PGCD}(2n\,;2n+2)=\ldots\ldots$.
Justifier sur les lignes ci-dessous.

……..

……..

……..

Rédiger une phrase en français énonçant la propriété que l'on vient de démontrer dans la question 2°) (sans parler de n).

Le PGCD de deux …..…………………………………………………………………………………………..

VI. (2 points)

Soit a et b deux entiers relatifs. On suppose que a divise $2b$ et que a est impair.
Que peut-on en déduire ? Justifier.

……..

……..

……..

……..

Corrigé de l'interrogation écrite du 30-3-2023

I.

On applique l'algorithme d'Euclide à deux entiers naturels a et b dont le PGCD est égal à 5, en commençant par la division euclidienne de a par b et en écrivant la dernière division de reste nul.
Les quotients obtenus sont tous égaux à 2.
Dans chaque cas, on demande de déterminer les valeurs de a et b. On répondra par deux égalités sur les pointillés.

1[er] cas : On suppose que l'algorithme comporte deux divisions euclidiennes.

$$a=25 \qquad b=10$$

$a=b\times 2+5$

$b=5\times 2+0$

On reconstitue l'algorithme d'Euclide avec les informations de l'énoncé.

2[e] cas : On suppose que l'algorithme comporte trois divisions euclidiennes.

$$a=60 \qquad b=25$$

$a=b\times 2+r$

$b=r\times 2+5$

$r=2\times 5=10$

II.

1°) Compléter l'équivalence suivante où a est un entier relatif.

« a est divisible par 20 et par 22 si, et seulement si, a est divisible par 220. »

Justifier la réponse. On pourra écrire une égalité.

Le PPCM de 20 et de 22 est 220 (on peut l'obtenir aisément grâce à la calculatrice).

2°) Quel est le plus petit multiple commun à 20 et à 22 supérieur ou égal à 2023 ?

2200 (une seule réponse sans égalité)

On peut utiliser la propriété « les multiples communs à deux entiers relatifs sont les multiples de leur PPCM » ou utiliser un programme Python.

III.

Appliquer l'algorithme d'Euclide à 390 et 525.

$525 = 1 \times 390 + 135$
$390 = 2 \times 135 + 120$
$135 = 1 \times 120 + 15$
$120 = 8 \times 15 + 0$

Quels sont les diviseurs positifs communs à 390 et 525 ?

1, 3, 5, 15 (répondre sans égalité)

On utilise la propriété : « Les diviseurs communs à deux entiers naturels non tous les deux nuls sont les diviseurs de leur PCGD ».

IV.

Déterminer le PGCD de 3 et de $2^n + 2^{n+1}$ où *n* est un entier naturel quelconque.
Justifier.

On commence par transformer $2^n + 2^{n+1}$ de manière à démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n \times 1 + 2^n \times 2^1 = 2^n \times (1+2) = 3 \times 2^n$$

Cette dernière égalité montre que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

On en déduit que $\text{PGCD}\left(3\,;2^n + 2^{n+1}\right) = 3$.

V.

Dans les deux questions, *n* désigne un entier relatif quelconque.

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $\text{PGCD}(n\,;n+1) = 1$.

2°) Compléter l'égalité : $\text{PGCD}(2n\,;2n+2) = 2$.
Justifier sur les lignes ci-dessous.

$$\text{PGCD}(2n\,;2n+2) = \text{PGCD}\big(2n\,;2(n+1)\big) = 2\text{PGCD}(n\,;n+1)$$

Or $\text{PGCD}(n\,;n+1) = 1$ (propriété du cours : « Deux entiers relatifs consécutifs sont toujours premiers entre eux »)
donc $\text{PGCD}(2n\,;2n+2) = 2$.

Rédiger une phrase en français énonçant la propriété que l'on vient de démontrer dans la question 2°) (sans parler de *n*).

Le PGCD de deux nombres pairs consécutifs est égal à 2.

VI.

Soit a et b deux entiers relatifs. On suppose que a divise $2b$ et que a est impair.
Que peut-on en déduire ? Justifier.

On sait que a et b sont deux entiers relatifs et que $a \mid 2b$.
De plus, on sait que a est impair. On en déduit que a et 2 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, on a donc $a \mid b$.