T exp

Interrogation écrite du jeudi 16 mars 2023 (50 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 et A^3.

- Que peut-on dire de la suite $\left(A^n\right)$?

- Écrire la matrice A^{2023} après avoir justifié brièvement.

II. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est un réel.

1°) Dans cette question, on prend $\alpha = 1$.
Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
Conjecturer A^n pour *n* entier naturel quelconque.

2°) Dans cette question, on prend $\alpha = -1$.
Calculer A^2.
Que peut-on dire de la suite $\left(A^n\right)$ dans ce cas ?
Écrire la matrice A^{2023}.

3°) Dans cette question, on prend $\alpha = 0$.
Calculer A^2.
Que peut-on dire de la suite $\left(A^n\right)$ dans ce cas ?
Écrire la matrice A^{2023}.

4°) Dans cette question, on prend $\alpha = 2$.
Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
Conjecturer alors A^n pour *n* entier naturel quelconque.
Démontrer que la conjecture est vraie en appliquant à la matrice $B = \frac{1}{2}A$ la propriété rappelée au verso pour des valeurs de *a* et *b* convenablement choisies.

5°) Dans cette question, on revient au cas général où α est un réel quelconque.
Calculer A^2, A^3, A^4.
Conjecturer alors A^n pour *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
On donnera l'un des coefficients sous la forme d'une somme (en utilisant éventuellement le symbole Σ).

III. (2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère une matrice A carrée d'ordre n dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 ou à – 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. La matrice A est une matrice diagonale.

Déterminer A^2.

IV. (5 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.

2°) Vérifier que $\mathrm{PBP}^{-1}=\mathrm{A}$.

3°) En déduire A^n pour n entier naturel quelconque.

Partie 2 (2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=1$ et $v_0=3$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n+v_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

À l'aide de la matrice A, déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

On posera $\mathrm{X}_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Rappels

① Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
La matrice identité d'ordre n est la matrice notée I_n, carrée d'ordre n, dont tous les coefficients situés sur la diagonale sont égaux à 1 et dont tous les autres coefficients sont égaux à 0 : $\mathrm{I}_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ddots & & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & \ddots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$.

② Soit a et b deux réels de somme non nulle.

Pour tout entier naturel n, on a : $\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}$.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

● Écrire des égalités dans les cases.

● La suite $\left(A^n\right)$ est …………………………………………………………………………

● ……..

II. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

1°)

2°)

	La suite $\left(A^n\right)$ est …………………………………………	

3°)

	La suite $\left(A^n\right)$ est …………………………………………	

4°)

……..

……..

5°)

III. (2 points)

……………….. (une seule égalité)

IV. (5 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

2°) ………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

3°) ………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Partie 2 (2 points)

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 16-3-2023

I.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

● Calculer A^2 et A^3.

$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$\mathrm{A}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

● Que peut-on dire de la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$?

On observe que $\mathrm{A}^3=\mathrm{I}_2$.
On en déduit que la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ est périodique de période 3 (propriété du cours).

● Écrire la matrice A^{2023} après avoir justifié brièvement.

On utilise le résultat démontré précédemment.

On effectue la division euclidienne de 2023 par 3 : $2023=674\times3+1$.

On a donc $\mathrm{A}^{2023}=\mathrm{A}$, soit $\mathrm{A}^{2023}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

On notera que la calculatrice ne permet pas d'effectuer ce calcul ; elle est en dépassement de capacité.

II.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ où α est un réel.

1°) Dans cette question, on prend $\alpha=1$.
Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
Conjecturer alors A^n pour *n* entier naturel quelconque.

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{A}^2=\mathrm{A}\times\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut utiliser la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice.
Attention, la matrice A est triangulaire supérieure. Ce n'est pas une matrice diagonale.
On n'a donc pas de formule qui donne l'expression de A^n en fonction de *n* pour *n* entier naturel quelconque.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°) Dans cette question, on prend $\alpha = -1$.
Calculer A^2.
Que peut-on dire de la suite $\left(A^n\right)$ dans ce cas ?
Écrire la matrice A^{2023}.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On observe que $A^2 = I_2$.
On en déduit que la suite $\left(A^n\right)$ est périodique de période 2 (propriété du cours).

$A^{2023} = A^{2\times 1011+1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3°) Dans cette question, on prend $\alpha = 0$.
Calculer A^2.
Que peut-on dire de la suite $\left(A^n\right)$ dans ce cas ?
Écrire la matrice A^{2023}.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On observe que $A^2 = A$. On dit que la matrice A est idempotente.

D'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = A$; la suite $\left(A^n\right)$ est stationnaire à partir de l'exposant 1 (propriété du cours).

On a donc $A^{2023}=A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

4°) Dans cette question, on prend $\alpha=2$.
Calculer A^2, A^3, A^4, A^5.
Conjecturer alors A^n pour *n* entier naturel quelconque.
Démontrer que la conjecture est vraie en appliquant à la matrice $B=\frac{1}{2}A$ la propriété rappelée au verso pour des valeurs de *a* et *b* convenablement choisies.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1 & 15\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}1 & 31\\ 0 & 32\end{pmatrix}$$

On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & 2^n-1\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

On a $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ donc $B=\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\\ 0 & 1-0\end{pmatrix}$.

On applique à B la propriété rappelée pour *a* et *b* tels que $a+b\neq 0$:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}^n=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}.$$

On choisit $a=\frac{1}{2}$ et $b=0$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{B}^n=\frac{1}{\frac{1}{2}+0}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{\left(1-\frac{1}{2}-0\right)^n}{\frac{1}{2}+0}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=2^n\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2^n\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2^n-1\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

Autre méthode :

On écrit $\mathrm{A}=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On pose : $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{U}^2=\mathrm{U}$, $\mathrm{V}^2=\mathrm{V}$, $\mathrm{UV}=\mathrm{VU}=0$.

5°) Dans cette question, on revient au cas général où α est un réel quelconque.
Calculer A^2, A^3, A^4.
Conjecturer alors A^n pour *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
On donnera l'un des coefficients sous la forme d'une somme (en utilisant éventuellement le symbole Σ).

$$\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+\alpha\\ 0 & \alpha^2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3=\mathrm{A}\times\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1+\alpha\\ 0 & \alpha^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+\alpha+\alpha^2\\ 0 & \alpha^3\end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire $\mathrm{A}^3=\mathrm{A}^2\times\mathrm{A}$.

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3 \\ 0 & \alpha^4 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice Numworks, on peut utiliser l'astuce qui consiste à remplacer α par π.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha^k \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$.

On peut démontrer cette formule en utilisant un raisonnement par récurrence.
Avec cette formule, on peut retrouver tous les résultats des questions précédentes.

III.

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère une matrice A carrée d'ordre *n* dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 ou à – 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. La matrice A est une matrice diagonale.
Déterminer A^2.

On obtient A^2 (carré de la matrice A) en élevant au carré les coefficients de la diagonale de A (on applique la propriété des puissances d'une matrice diagonale).

Comme tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 ou à – 1, leurs carrés sont tous égaux à 1.

A^2 est donc la matrice carrée d'ordre *n* dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres coefficients sont nuls.
On en déduit que A^2 est la matrice identité d'ordre *n*.

$$A^2 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ où ε_1, ε_2, …, ε_n sont des réels tous égaux à 1 et à – 1.

La formule des puissances d'une matrice diagonale permet d'écrire : $A^2 = \begin{pmatrix} {\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & {\varepsilon_2}^2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & {\varepsilon_n}^2 \end{pmatrix}$.

IV.

Partie 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que P est inversible et donner son inverse.

$\det P = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2$

Le déterminant de P est non nul donc P est inversible.

En appliquant la formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, on a obtient : $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

2°) Vérifier que $PBP^{-1} = A$.

$$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(on met le } \frac{1}{2} \text{ devant)}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

On peut utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul.

On peut aussi commencer par calculer le produit PB : $PB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3°) En déduire A^n pour *n* entier naturel quelconque.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PB^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (on applique la propriété des puissances d'une matrice diagonale)

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (on observera l'astuce qui consiste à placer tout de suite le $\frac{1}{2}$ devant le produit, afin d'alléger les calculs)

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la formule fonctionne pour $n = 0$ et $n = 1$.

Partie 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = 1$ et $v_0 = 3$ ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

À l'aide de la matrice A, déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*.

On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

On observe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

(X_n) est donc une suite de matrices colonnes (vecteurs colonnes) vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par la matrice A).

D'après le cours, on peut aisément exprimer X_n en fonction de A, X_0 et *n* : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1+3\times\left(3^n-1\right) \\ 3^n-1+3\times\left(3^n+1\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1+3\times\left(3^n-1\right) \\ 3^n-1+3\times\left(3^n+1\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\times3^n-2 \\ 4\times3^n+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times3^n-1 \\ 2\times3^n+1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\times3^n-1$ et $v_n = 2\times3^n+1$.

On vérifie la cohérence de ce résultat avec les résultats obtenus en calculant les premiers termes des suites.