T exp

Interrogation écrite du jeudi 9 février 2023 (45 minutes)

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans un jeu, on dispose d'une pièce non truquée.
Le joueur la lance n fois dans des conditions identiques indépendantes, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé à l'avance. Il note chaque fois le côté que présente la pièce. Il est déclaré gagnant à l'issue des n lancers si la pièce présente au moins une fois le même côté pour deux lancers consécutifs et est déclaré perdant dans le cas contraire.

1°) Compléter les pointillés afin que la fonction Python d'en-tête `def jeu(n):` donnée dans le cadre ci-dessous permette de simuler une partie de ce jeu.
On convient que 1 code pile et 0 code face.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.

```
def jeu(n):
    L=[randint(0,1) for i in range(n)]
    v=0
    for k in range(n-1):
        if L[k]==L[k+1]:
           v=1
    if ……….. :
       print("gagné")
    else:
       print("perdu")
```

2°) Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu pour $n=2$ puis pour $n=3$?
Écrire uniquement les résultats sans expliquer le raisonnement. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

…….. ……..

Bonus : Exprimer la probabilité de gagner pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque. ……………..

II. (4 points)

Dans chaque cas, indiquer si l'entier admet un inverse modulo 12 et déterminer un inverse lorsque c'est possible.
Écrire oui ou non dans la deuxième colonne et donner un inverse dans la troisième colonne.

5		
9		
2023		
4		

III. (4 points)

On pose $\mathrm{A} = 2023^{2023}$.
Quel est le reste de la division euclidienne de A par 11 ?
On attend une démarche utilisant les congruences. Vérifier en utilisant la calculatrice Python.

………..

………..

………..

………..

IV. (3 points)

On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^2 \equiv -2 \pmod{6}$.

À l'aide d'un tableau de congruences (à faire), compléter l'équivalence ci-dessous pour x entier relatif par des relations de congruences de la forme $x \equiv ......\ \pmod{6}$.

$x \in E \Leftrightarrow$ ……………………….……………………

V. (1 point)

Soit Ω un point du plan P et k un réel non nul.
Pour tout point M de P on note M' son image par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
Quelle est l'égalité vectorielle qui définit M' ? ……………………..

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan P muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\Omega(1\,;-2)$. Faire un graphique sur la feuille annexe.

On note f l'homothétie de centre Ω et de rapport 3. On écrira les réponses en bas de la page et on donnera le détail des calculs sur la feuille annexe.
1°) Soit M un point quelconque de P et M' son image par f.
On note $(x\,;y)$ les coordonnées de M et $(x'\,;y')$ les coordonnées de M'.
Exprimer x' en fonction de x et y' en fonction de y. Écrire directement les expressions.
2°) Calculer les coordonnées du point A', image du point $\mathrm{A}(0\,;5)$ par f. Vérifier sur le graphique.

1°) 2°)

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Graphique de l'exercice VI question 2°)

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 9-2-2023

I.

Dans un jeu, on dispose d'une pièce non truquée.
Le joueur la lance n fois dans des conditions identiques indépendantes, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé à l'avance. Il note chaque fois le côté que présente la pièce. Il est déclaré gagnant à l'issue des n lancers si la pièce présente au moins une fois le même côté pour deux lancers consécutifs et est déclaré perdant dans le cas contraire.

1°) Compléter les pointillés afin que la fonction Python d'en-tête `def jeu(n):` donnée dans le cadre ci-dessous permette de simuler une partie de ce jeu.
On convient que 1 code pile et 0 code face.
On suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.

```
def jeu(n):
    L=[randint(0,1) for i in range(n)]
    v=0
    for k in range(n-1):
        if L[k]==L[k+1]:
           v=1
    if v==1:
       print("gagné")
    else:
       print("perdu")
```

2°) Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu pour $n=2$ puis pour $n=3$?
Écrire uniquement les résultats sans expliquer le raisonnement. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4}$$

On dresse un arbre de probabilités ou de possibilités dans chaque cas.

Dans le cas où $n=2$, il y a 4 résultats possibles dont 2 sont gagnants : pile-pile et face-face.

Dans le cas où $n=3$, il y a 8 résultats possibles dont 6 sont gagnants :
pile-pile-pile
pile-pile-face
pile-face-face
face-pile-pile
face-face-pile
face-face-face.

Bonus : Exprimer la probabilité de gagner pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 quelconque. ……………..

Il y a 2^n cas possibles.
Il existe 2 cas où l'on ne peut pas avoir le même côté pour deux lancers consécutifs : les résultats avec une alternance de piles et de faces :
pile-face-pile-face … (le premier lancer donne pile)
face-pile-face-pile … (le premier lancer donne face).

La probabilité de gagner au jeu est donc égale à $1-\frac{2}{2^n}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$.

II.

Dans chaque cas, indiquer si l'entier admet un inverse modulo 12 et déterminer un inverse lorsque c'est possible.
Écrire oui ou non dans la deuxième colonne et donner un inverse dans la troisième colonne.

5	oui	5
9	non	
2023	oui	7
4	non	

Rappel de cours sur la notion de l'inverse d'un nombre modulo *n*

Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
Soit a un entier relatif.

Définition

On dit que a admet un inverse modulo n (pour le produit) s'il existe un entier relatif x tel que $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

On dit que x est un inverse de a modulo n.

Propriété (critère pour qu'un entier relatif admette un inverse modulo *n*)

a admet un inverse modulo $n \Leftrightarrow a$ est premier avec n.

5 et 12 sont premier entre eux donc 5 admet un inverse modulo 12.

Pour déterminer un inverse de 5 modulo 12, on cherche un entier relatif x tel que $5x \equiv 1 \pmod{12}$.

1ère méthode : On essaie en testant différentes valeurs de x.

On cherche un entier relatif x tel que $5x \equiv 1 \pmod{12}$.
On peut prendre $x = 5$.
En effet, on a $5 \times 5 = 25$ et $5 \times 5 \equiv 1$ (mod. 12).
On peut même éventuellement faire un tableau de congruences.

2e méthode : On considère la fonction $x \longmapsto$ reste de la division euclidienne de $5x$ par 12 et on utilise la calculatrice.

3e méthode : On utilise une égalité de Bezout.

4e méthode :

$5x \equiv 1$ (mod. 12) $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \;/\; 5x = 1 + 12k$

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1+12x}{5}$ (changement de cadre).

On cherche $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) \in \mathbb{Z}$.

On peut procéder par tâtonnements en testant différentes valeurs de x.
Sinon, on peut aussi utiliser la calculatrice en rentrant la fonction f et en réglant la table de valeurs à 0 avec un pas de 1.

---

9 et 12 ne sont pas premiers entre eux (car 3 est un diviseur commun différent de 1 et de – 1) donc 9 n'admet pas d'inverse modulo 12.

$2023 \times 7 \equiv 1$ (mod. 12)

On peut commencer par réduire 2023 modulo 12 : $2023 \equiv 7$ (mod. 12). On cherche alors un entier relatif x tel que $7x \equiv 1$ (mod. 12).

---

4 et 12 ne sont pas premiers entre eux (car 4 est un diviseur commun différent de 1 et de – 1) donc 4 n'admet pas d'inverse modulo 12.

III.

On pose $\mathrm{A}=2023^{2023}$.
Quel est le reste de la division euclidienne de A par 11 ?
On attend une démarche utilisant les congruences. Vérifier en utilisant la calculatrice Python.

On a $2023\equiv -1 \pmod{11}$ [résultat très facile à obtenir].

D'après la propriété des congruences avec des exposants entiers naturels, on obtient :
$\mathrm{A}\equiv(-1)^{2023} \pmod{11}$ soit $\mathrm{A}\equiv -1 \pmod{11}$.

De plus, on a $-1\equiv 10 \pmod{11}$, ce qui, par transitivité de la relation de congruence, permet d'écrire $\mathrm{A}\equiv 10 \pmod{11}$.

Comme 10 est un entier naturel strictement inférieur à 11 ($10<11$), la dernière relation de congruence permet d'affirmer que le reste de la division euclidienne de A par 11 est égal à 10.

On vérifie en utilisant la calculatrice Python : 2023**2023%11.

IV.

On note E l'ensemble des entiers relatifs x tels que $x^2\equiv -2 \pmod{6}$.

À l'aide d'un tableau de congruences (à faire), compléter l'équivalence ci-dessous pour x entier relatif par des relations de congruences de la forme $x\equiv ......\pmod{6}$.

$$x\in E \Leftrightarrow x\equiv 2 \pmod{6} \ \boxed{\text{ou}} \ x\equiv 4 \pmod{6}$$

Si $x\equiv\ldots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
Alors $x^2\equiv\ldots \pmod{6}$	0	1	4	3	4	1

La congruence $x^2\equiv -2 \pmod{6}$ est équivalente à $x^2\equiv 4 \pmod{6}$.

Tout nombre entier relatif est congru soit à 0, soit à 1, soit à 2, soit à 3, soit à 4, soit à 5 modulo 6.

Le connecteur logique qui convient est bien le « ou » et non le « et ».

V.

Soit Ω un point du plan P et k un réel non nul.
Pour tout point M de P on note M' son image par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
Quelle est l'égalité vectorielle qui définit M' ? $\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'}=k\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$

$f=\mathrm{h}_{(\Omega,\,k)}$

VI.

Dans le plan *P* muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\Omega\left(1\,;-2\right)$. Faire un graphique sur la feuille annexe.

On note *f* l'homothétie de centre Ω et de rapport 3. On écrira les réponses en bas de la page et on donnera le détail des calculs sur la feuille annexe.
1°) Soit M un point quelconque de *P* et M' son image par *f*.
On note $\left(x\,;y\right)$ les coordonnées de M et $\left(x'\,;y'\right)$ les coordonnées de M'.
Exprimer x' en fonction de *x* et y' en fonction de *y*. Écrire directement les expressions.
2°) Calculer les coordonnées du point A', image du point $A\left(0\,;5\right)$ par *f*. Vérifier sur le graphique.

1°)

$f = h_{(\Omega,\,3)}$

On utilise directement les formules donnant l'expression analytique d'une homothétie dans un repère.

$$\begin{cases} x'-1 = 3\left(x-1\right) \\ y'+2 = 3\left(y+2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3x-3+1 \\ y' = 3y+6-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3x-2 \\ y' = 3y+4 \end{cases}$$

On aurait pu utiliser l'expression matricielle : $\begin{pmatrix} x'-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$.

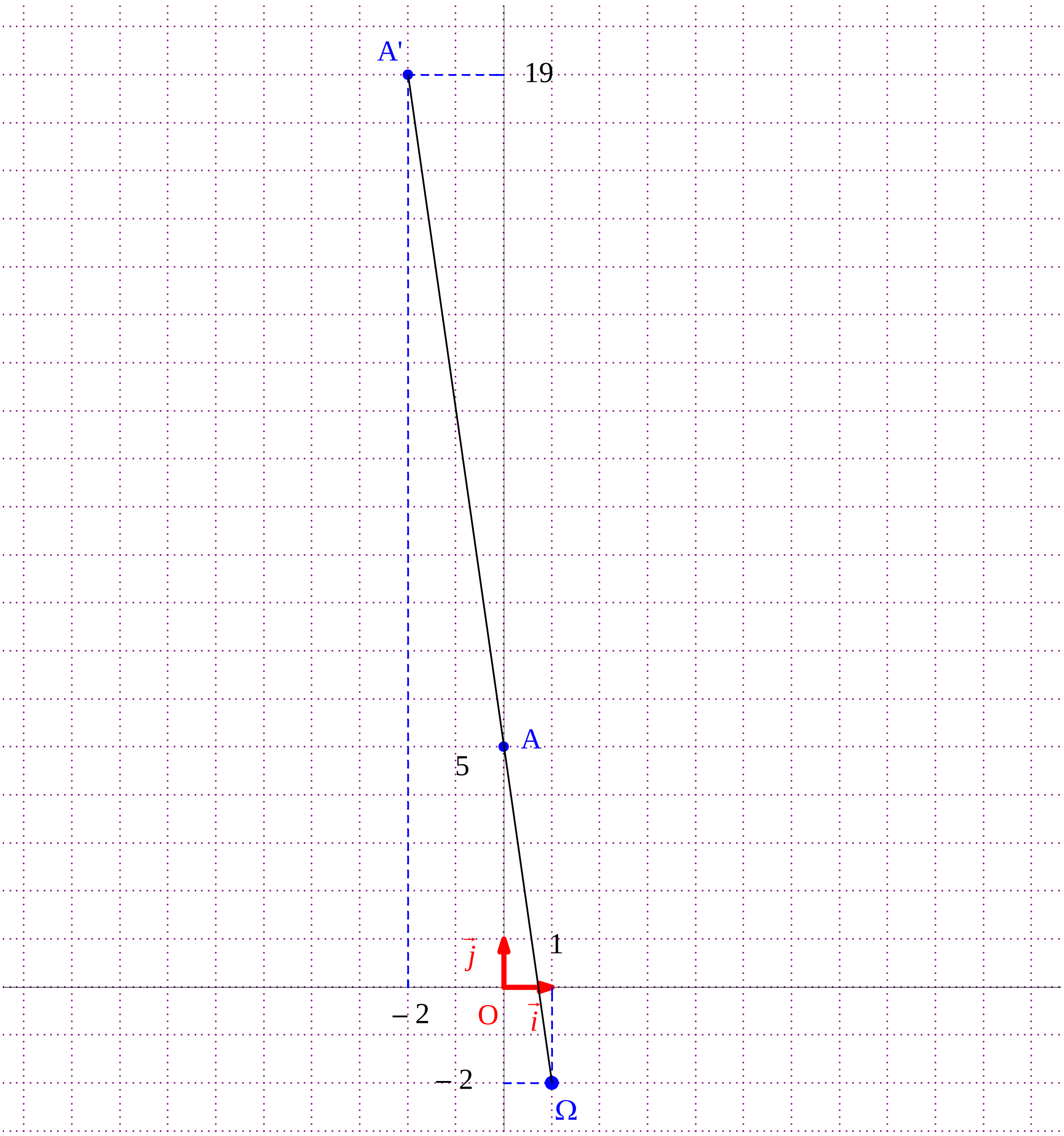
2°)

On applique les formules obtenues dans la question précédente.

$$A' \left| \begin{array}{l} x_{A'} = 3\times x_A - 2 = 3\times 0 - 2 = -2 \\ y_{A'} = 3\times y_A + 4 = 3\times 5 + 4 = 19 \end{array} \right.$$

On vérifie sur le graphique en plaçant A et A' (A' est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\Omega A'} = 3\overrightarrow{\Omega A}$).

Les coordonnées de A' lues sur le graphique correspondent bien à celles obtenues par le calcul.


A'
19
A
5
1
j
O
i
− 2
− 2
Ω