TS

Les vecteurs de l'espace

Le mercredi 19 janvier 2022

Pour savoir si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on cherche s'il existe un réel λ …

Pour savoir si 3 vecteurs sont coplanaires, on cherche …

Le 15 avril 2020

patron d'un prisme oblique

J'avais noté cela à propos des parallélépipèdes car un parallélépipède est un cas particulier de prisme oblique.

L'objet de ce chapitre est la *géométrie vectorielle* dans l'espace.

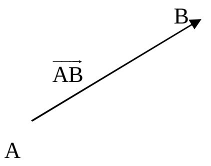
Dans tout le chapitre, l'espace est noté $\mathcal{E}$; les éléments de $\mathcal{E}$ sont des points.

I. Calculs vectoriels dans l'espace

1°) Définition d'un vecteur non nul

A et B sont 2 points distincts de $\mathcal{E}$.
Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- **sa direction :** celle de la droite (AB)
- **son sens :** celui de A vers B.
- **sa norme :** la longueur AB $\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB\right)$



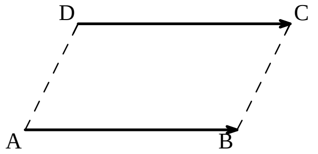
Un vecteur caractérise une translation.

2°) Définition du vecteur nul

Un vecteur de l'espace défini par deux points confondus de $\mathcal{E}$ $\left(\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}...\right)$ est appelé le **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

3°) Égalité de deux vecteurs

A, B, C, D sont 4 points distincts de $\mathcal{E}$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow [AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Lorsque $A \neq B$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = ...$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ … sont des **représentants** d'un même vecteur qui peut être noté par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$.

Le point A est appelé origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est appelé l'extrémité.

Exemple :

Dans un parallélépipède ABCDEFGH, on a le droit d'écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

4°) Opérations sur les vecteurs

• Comme dans le plan, on définit :
- la somme de deux vecteurs ;
- le produit d'un vecteur par un réel.

• Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

En particulier, pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace et pour tout réel k, on a : $\| k\vec{u} \| = | k | \times \| \vec{u} \|$.

5°) Relation de Chasles

A, B, C sont trois points quelconques de $\mathcal{E}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Cette relation peut aussi s'écrire directement sous forme soustractive : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (assez intéressant pour gagner du temps en exercice).

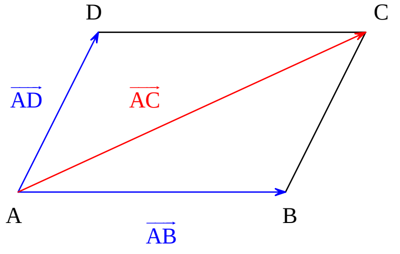
6°) Règle du parallélogramme

Propriété :

Soit ABCD un parallélogramme de $\mathcal{E}$.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

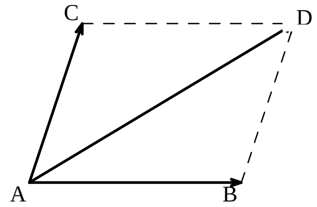
$\overrightarrow{AC}$ peut être appelé vecteur de la diagonale.



L'égalité du parallélogramme peut être écrite à partir de n'importe quel sommet du parallélogramme.

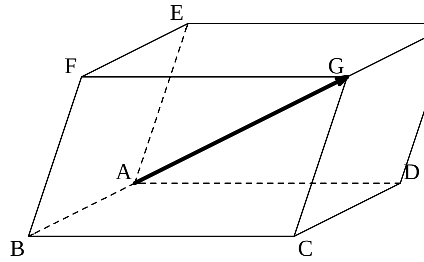
Corollaire :

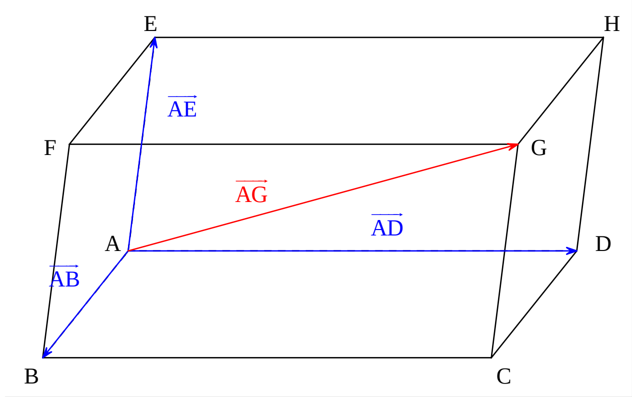
A, B, C sont 3 points quelconques de $\mathcal{E}$.
En notant D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



7°) Règle du parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (solide dont les 6 faces sont des parallélogrammes).
Le parallélogramme EFGH est l'image de ABCD par une translation.
On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.





On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme.

D'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

Remarque :

L'égalité du parallélépipède peut être écrite à partir de n'importe quel sommet du parallélépipède.

Un parallélépipède est un prisme particulier.
Un prisme est un solide géométrique délimité par deux polygones, appelés les bases du prisme, images l'un de l'autre par une translation. Ces bases sont reliées entre elles par des parallélogrammes.
Quand ces parallélogrammes sont des rectangles, on dit que le prisme est droit.
En géométrie affine, un prisme est un cas particulier de polyèdre. C'est un cylindre dont la base est polygonale.
Le patron d'un parallélépipède n'est pas évident à réaliser. On peut se référer à l'article Wikipedia.

8°) Barycentre dans l'espace

On définit le barycentre de plusieurs points dans l'espace de la même manière que dans le plan.

Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

Cas particulier d'un milieu :

Propriété 1 : Le milieu I d'un segment $[AB]$ est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Le milieu I du segment $[AB]$ peut être caractérisé de multiples façons par une égalité vectorielle :

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ etc.

Propriété 2 : $\forall M \in \mathcal{E}$ $\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ où I est le milieu de $[AB]$

II. Vecteurs colinéaires

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** pour exprimer que :
- soit ils sont tous les deux non nuls et ont la même direction
- soit l'un au moins des deux vecteurs est nul.

On notera que par définition le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

2°) Règle (admise sans démonstration)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u}\neq\vec{0}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v}=\lambda\vec{u}$.

3°) Propriété

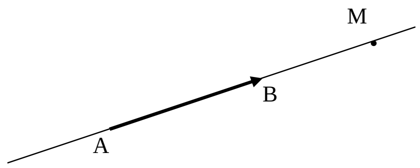
A, B, C sont 3 points quelconques de $\mathcal{E}$.
A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

L'alignement des points A, B, C peut être caractérisé de multiples façons par la colinéarité de deux vecteurs.

III. Droites de l'espace

1°) Théorème de caractérisation vectorielle

A et B sont 2 points distincts de $\mathcal{E}$.
M est un point quelconque de $\mathcal{E}$.



$M\in(AB) \Leftrightarrow$ A, B, M alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ donc

$M\in(AB) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

« Il existe »

On peut choisir la lettre λ ou n'importe quelle autre lettre.

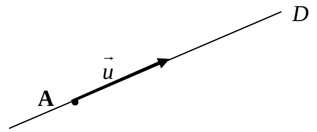
2°) Conséquence du théorème de caractérisation

L'ensemble des points $M\in\mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB).

Cette conséquence est valable dans le plan.

3°) Définition vectorielle d’une droite de l’espace

A est un point quelconque de l’espace.
$\vec{u}$ est un vecteur non nul.



• L’ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ est une droite *D*.

• On dit que *D* est la droite de **repère** $(A, \vec{u})$.

origine **vecteur unité**

• Le réel λ est appelé l’**abscisse** du point M dans le repère $(A, \vec{u})$.

Autre formulation :

A est un point fixé de l’espace et $\vec{u}$ est un vecteur fixé non nul de l’espace.
L’ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (ou de repère $(A, \vec{u})$).

4°) Définition d’un vecteur directeur d’une droite

Un **vecteur directeur** d’une droite *D* de l’espace est un vecteur non nul qui a la même direction que *D*.

5°) Caractérisation d’un segment et d’une demi-droite

• L’ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel $\lambda \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ est le segment $[AB]$.

• L’ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ est la demi-droite $[AB)$.

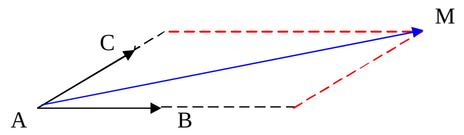
IV. Plans de l’espace

1°) Rappel

Un plan de l’espace est défini par :
- 3 points non alignés
- 2 droites sécantes
- 1 droite et 1 point n’appartenant pas à cette droite
- 2 droites strictement parallèles

2°) Théorème de caractérisation vectorielle d’un plan de l’espace

A, B, C sont trois points quelconques non alignés de $\mathcal{E}$.
M est un point quelconque de $\mathcal{E}$.



$M \in (ABC) \Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

3°) Démonstration de la partie directe

• **Hypothèses :** $M \in (ABC)$

• **But :** Démontrer qu’il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

• **Démonstration :**

A, B, C ne sont pas alignés donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC).
$M \in (ABC)$ par hypothèse donc il possède des coordonnées cartésiennes x_M et y_M dans ce repère.
Par suite, $\overrightarrow{AM} = x_M\,\overrightarrow{AB} + y_M\,\overrightarrow{AC}$.

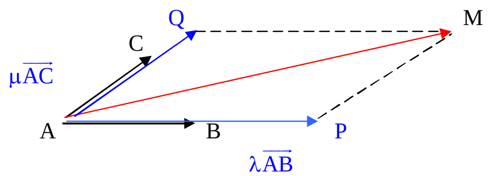
On pose $\begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = \mu \end{cases}$.

On obtient $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

4°) Démonstration de la partie réciproque

• **Hypothèses :** M est un point de l’espace pour lequel il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.
• **But :** Démontrer que $M \in (ABC)$.
• **Démonstration :**

Notons P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$
et Q le point tel que $\overrightarrow{AQ} = \mu\overrightarrow{AC}$.



$P \in (AB)$ donc $P \in (ABC)$.
$Q \in (AC)$ donc $Q \in (ABC)$.

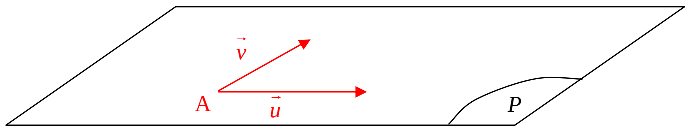
Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.
Par suite, APMQ est un parallélogramme.
Comme A, P, Q appartiennent au plan (ABC), on en déduit que $M \in (ABC)$.

5°) Conséquence du théorème

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ est le plan (ABC).

6°) Définition vectorielle d'un plan

A est un point quelconque de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace.



- L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est un plan *P* de l'espace.
- On dit que *P* est le plan de **repère** $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

origine **vecteurs de base**

V. Vecteurs coplanaires

→ Rappel :

Définition [points coplanaires]

On dit que quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** lorsqu'ils sont situés dans un même plan.

On a également vu la notion de droites coplanaires (droites contenues dans un même plan).

→ Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une nouvelle notion : les vecteurs coplanaires.

1°) Définition 1

On s'intéresse à un « ensemble » de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace.

On dit que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer qu'il existe des points A, B, C, D, E, F, tous situés dans un même plan *P* tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

2°) Commentaires

La définition établit un lien entre points coplanaires et vecteurs coplanaires.
Elle fournit une condition suffisante pour que trois vecteurs de l'espace soient coplanaires ; on peut formuler cette condition suffisante sous la forme de la propriété suivante :

Des vecteurs définis par des points d'un même plan sont coplanaires.

Cette propriété peut aussi être énoncée sous la forme suivante :

Si A, B, C, D, E, F sont des points coplanaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

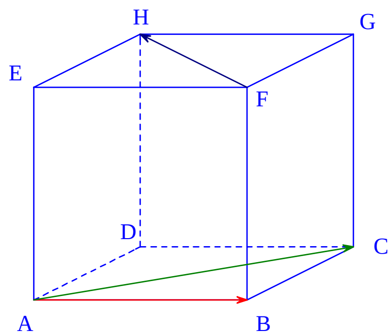
On peut utiliser cette propriété pour démontrer que des vecteurs sont coplanaires (voir exemple).

La réciproque de cette propriété est fausse comme va nous le montrer l'exemple suivant.

3°) Exemple et contre-exemple

On considère un cube ABCDEFGH.

- On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

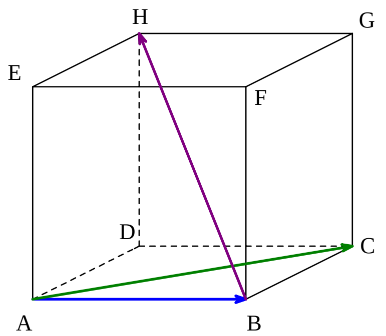


$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ (l'idée à retenir, c'est que l'on peut « déplacer » les vecteurs dans l'espace ; ici, on a translaté les points F et H).

Les points A, B, C, D sont coplanaires (ils sont tous situés dans le plan (ABC)) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

On peut observer que les points A, B, C, F, H ne sont pas coplanaires ; néanmoins, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

• On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas coplanaires.

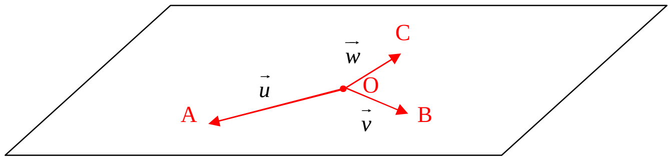
Ce n'est pas évident à justifier avec la définition 1. On peut juste le « visualiser ».

4°) Définition 2 (équivalente à la définition 1)

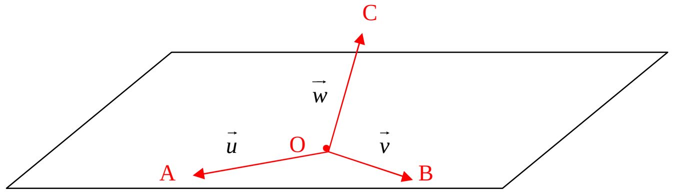
On dit que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer que, O étant un point fixé, les 4 points :
O,
A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$,
B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$,
C tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$
sont dans un même plan.

On dit que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer que leurs représentants issus d'un même point $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ($\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$) sont tels que O, A, B, C sont coplanaires.

On peut démontrer que cette définition est équivalente à la définition 1.



Les points O, A, B, C sont coplanaires donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.



Les points O, A, B, C ne sont pas coplanaires donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Les **3** vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires signifie que les **4** points O, A, B, C sont coplanaires.

Les **3** vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas coplanaires signifie que les **4** points O, A, B, C ne sont pas coplanaires.

Cette définition permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs ayant la même origine soient coplanaires :

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires si et seulement si les points O, A, B, C sont coplanaires.

On pourra se servir de cette propriété pour déterminer si des vecteurs de l'espace sont coplanaires.

5°) Propriété

(découle du théorème de caractérisation vectorielle d'un plan)

Condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs dont deux sont non colinéaires soient coplanaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont 3 vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires.**

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Démonstration :

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow C \in (OAB)$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Méthode : comment démontrer que trois vecteurs sont coplanaires par calcul vectoriel

Pour déterminer si 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires, on cherche s'**il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

6°) Vocabulaire

On ne dit pas que :
- des vecteurs sont contenus dans un plan ;
- des vecteurs appartiennent à un plan ;
- des vecteurs sont inclus dans un plan.

On dit qu'ils admettent un représentant dont l'origine et l'extrémité sont dans un plan *P*.

7°) Propriété

Soit A, B, C, D, E, F des points de l'espace.
On suppose que :
A et B appartiennent à un plan P_1 ;
C et D appartiennent à un plan P_2 ;
E et F appartiennent à un plan P_3.
Si les plans P_1, P_2, P_3 sont parallèles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

Une dernière caractérisation :

On suppose que $A \neq B$, $C \neq D$, $E \neq F$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires si et seulement si les droites (AB), (CD), (EF) sont parallèles à un même plan.

8°) Caractérisation du parallélisme d'une droite et d'un plan

Soit *P* un plan de repère $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et *D* une droite de repère $\left(B, \vec{w}\right)$.
D est parallèle à *P* si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

VI. Lieux géométriques de référence dans l'espace liés aux distances

1°) Ensemble des points de l'espace tels que AM = *R* (A point fixé ; $R > 0$ fixé)

Sphère de centre A et de rayon *R*.

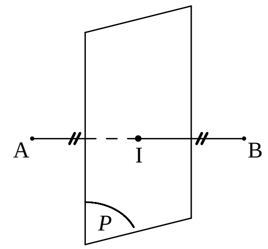
2°) Ensemble des points M de l'espace tels que MA = MB (A et B points fixés distincts)

Plan médiateur du segment $[AB]$ (c'est-à-dire plan perpendiculaire au segment $[AB]$ en son milieu).

VII. Appendice : plan médiateur d'un segment

1°) Définition

A et B sont deux points fixés distincts de l'espace.
On appelle **plan médiateur** du segment $[AB]$ **le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et orthogonal à (AB).**



2°) Propriété caractéristique (admise sans démonstration)

Un point M appartient au plan médiateur d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités de ce segment.

Appendice 1 : parallélépipède

Si ABCDEFGH est un parallélépipède, alors toutes ses faces sont des parallélogrammes.

Les segments [AG], [BH], [CE], [DF] ont le même milieu I.

Ce point I est appelé le centre du parallélépipède.

Appendice 2 : milieu d'une segment

Soit A et B deux points quelconques de l'espace. On note I le milieu de [AB].

Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration très facile utilisant la relation de Chasles

Appendice 3 : centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque.
Soit G son centre de gravité (point de concours des médianes).

On a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Cette égalité caractérise le point G (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul point G qui vérifie cette égalité).

On sait aussi que G est situé chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet c'est-à-dire :
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ où A', B', C' désignent les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].