T spécialité

Contrôle du mercredi 16 novembre 2022 (3 heures)

Le sujet se compose de deux parties, notées chacune sur 20.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
On pourra disposer d'une fiche A4 préparée à l'avance et écrite uniquement au recto.

Partie 1 (sur 20)

Dans tous les exercices de cette partie, aucune justification n'est demandée.

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.
Aucune justification n'est demandée.
On se contentera de donner les réponses.

1°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{x+5}{x+3}$ sont … .

2°) On considère une fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.
On sait que son extremum a pour valeur – 1 et que son discriminant est strictement négatif.
Quel est le signe de a ?

3°) Soit ABCD un carré de côté 6 cm.
Soit E un point appartenant à [AB] et F un point appartenant à [BC] tels que $\text{AE}=\text{CF}=x$ cm où x est un réel de l'intervalle $[0\,;6]$.
L'aire du triangle AEF est maximale pour $x=\ldots$ et est égale, dans ce cas, à ……….. .

II. (6 points)

Cet exercice est un QCM composé de 6 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une ou plusieurs réponses sont exactes.
Compléter le tableau de la feuille annexe avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucun point n'est retiré en cas de réponse fausse ou en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3)<2\ln(x+1)$ est :

a. $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$ b. $]1\,;+\infty[$ c. $\varnothing$ d. $]-1\,;1[$

2°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $\mathrm{F} : x \mapsto -\dfrac{1}{6}\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ b. $\mathrm{F} : x \mapsto -\dfrac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$ c. $\mathrm{F} : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ d. $\mathrm{F} : x \mapsto x^2\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

3°) Soit F une primitive d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$.

Une primitive G de *g* sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $G(x) = F(2x)$ b. $G(x) = 2F(2x)$ c. $G(x) = \frac{1}{2}F(2x)$ d. $G(x) = 2F(x)$

4°) On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.

Pour tout réel *x* de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln 24 - \ln\frac{3}{2}$ b. $f(2x) = f(x) + \ln 16$ c. $f(2x) = \ln 2 + f(x)$ d. $f(2x) = f(x)$

5°) Pour tout réel *a* strictement positif, l'expression $\ln\left(a^2\right) + \ln\frac{\sqrt{a}}{a} + \ln\frac{1}{a^2}$ est égale à :

a. $1 - \frac{\ln a}{2}$ b. $\frac{\ln a}{2}$ c. $3\ln a + \frac{1}{2}$ d. $-\frac{\ln a}{2}$

6°) On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x + 1$. Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la dérivée de *f* ?

a. $\ln x$ b. $\frac{1}{x} - 1$ c. $\ln x - 2$ d. $\ln x - 1$

III. (4 points)

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau de la feuille annexe avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucun point n'est retiré en cas de réponse fausse ou en l'absence de réponse.

1°) Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %. Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?
a. 2 heures b. 8 heures c. 9 heures d. 13 heures

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout entier naturel *n*.

On peut affirmer que la suite (u_n) est :

a. majorée et non minorée. b. minorée et non majorée. c. bornée. d. non majorée et non minorée.

3°) Soit *k* un réel non nul. Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout entier naturel *n*, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$. On peut affirmer que v_{10} est :
a. positif. b. négatif. c. du signe de *k*. d. du signe de $-k$

4°) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $w_0 = 2$ et par la relation de récurrence $4w_{n+1} = w_n$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, $w_n =$:

a. $\frac{1}{2^{n-1}}$ b. 2^{n+1} c. $\frac{1}{2^{2n-1}}$ d. 2^{2n+1}

IV. (4 points)

Pour chaque question, dire si l'affirmation est vraie ou fausse.

1°) Pour tout réel x, e^x, e^{x+1}, e^{x+2} sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + n - 1$ pour tout entier naturel n.
On a : $u_1 = 1$.

3°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 4$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = (n+1)v_n$ pour tout entier naturel n.
La suite (v_n) est géométrique.

4°) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
La suite (w_n) est majorée par 0.

Partie 2 (sur 20)

On fera les graphiques demandés au dos de la feuille de réponses de la partie 1.

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.

1°) On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions : $u_7 = 23$; $u_{13} = -1$.
Soit n un entier naturel quelconque.
Exprimer u_n en fonction de n.

2°) On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions : $v_3 = 4$; $v_7 = \dfrac{81}{4}$; tous les termes sont strictement positifs.
Soit n un entier naturel quelconque.
Exprimer v_n en fonction de n.

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \ln\left[1 + (u_n)^2\right]$ pour tout entier naturel n.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
On attend une rédaction soignée.

2°) On considère la fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=-1
    for i in range(1,n+1):

        u=…………

    return u
```

Compléter les pointillés de l'instruction `u=`………… .

On utilisera la fonction log du module math (que l'on suppose importé) qui désigne la fonction logarithme népérien ln en Python.

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage un protocole de traitement d'une maladie qui consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction *f* définie sur l'intervalle $I=[0\,;10]$ par $f(t)=3t\mathrm{e}^{1-0,5t}$, où *t* désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ce protocole, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

1°) Démontrer que, pour tout réel $t \in I$, on a : $f'(t)=3(1-0,5t)\mathrm{e}^{1-0,5t}$.
En déduire le tableau de variations de *f* sur *I*.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Tracer $\mathcal{C}$ avec soin ainsi que la tangente horizontale.
On prendra le centimètre pour unité graphique.

2°) Selon la modélisation considérée dans cet exercice, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

3°) • On admet que l'équation $f(t)=5 \quad (\mathrm{E})$ admet deux solutions distinctes α et β, avec $\alpha < \beta$, dans l'intervalle *I*.
À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs décimales approchées au millième par défaut de α et β.

• On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
On note *d* la durée d'efficacité, en minute, du médicament dans le cas de ce protocole.
Déterminer la valeur arrondie à l'unité de *d*.

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(ax^2+1\right)+b$ définie sur $\mathbb{R}$ où *a* et *b* sont des réels fixés, *a* étant strictement positif.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Dans cette question, on suppose que $a=1$ et que $b=2$.
Quelles sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 3 ?
On donnera les valeurs exactes.

2°) Dans cette question, on suppose que $a=1$ et que $b=3-\ln 2$.
On note A le point d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

3°) Dans cette question, on suppose que *a* et *b* sont quelconques avec *a* strictement positif.
On rappelle que pour tout réel $u>-1$, on a $\ln(u+1)\leqslant u$.
À l'aide de cette inégalité, démontrer que $\mathcal{C}$ est toujours en dessous de la parabole Γ d'équation $y=ax^2+b$.

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note *D* la droite définie par le système d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x=5t \\ y=2+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1°) Préciser les coordonnées du point A de *D* correspondant au paramètre $t=0$.
Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de *D*.
Tracer *D* sur le graphique de la feuille à part.

2°) On note D' la droite d'équation cartésienne $3x+2y-11=0$.
Cette droite est tracée sur le graphique.
On note I le point d'intersection des droites *D* et D'.
Recopier et compléter la phrase suivante : « Le paramètre *t* du point I sur la droite *D* vérifie l'égalité ………… ».
En déduire la valeur de *t* correspondante. Calculer alors les coordonnées de I et vérifier sur le graphique.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………..…………………………….. **Note : ….. / 20**

Réponses de la partie 1

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{x+5}{x+3}$ sont … .

2°) On considère une fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.
On sait que son extremum a pour valeur – 1 et que son discriminant est strictement négatif.
Quel est le signe de a ?

………… (une seule réponse)

3°) Soit ABCD un carré de côté 6 cm.
Soit E un point appartenant à [AB] et F un point appartenant à [BC] tels que $\text{AE}=\text{CF}=x$ cm où x est un réel de l'intervalle $[0\,;6]$.
L'aire du triangle AEF est maximale pour $x=\ldots$ et est égale, dans ce cas, à ……….. .

II. (6 points)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	
Réponse							

III. (4 points)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	
Réponse					

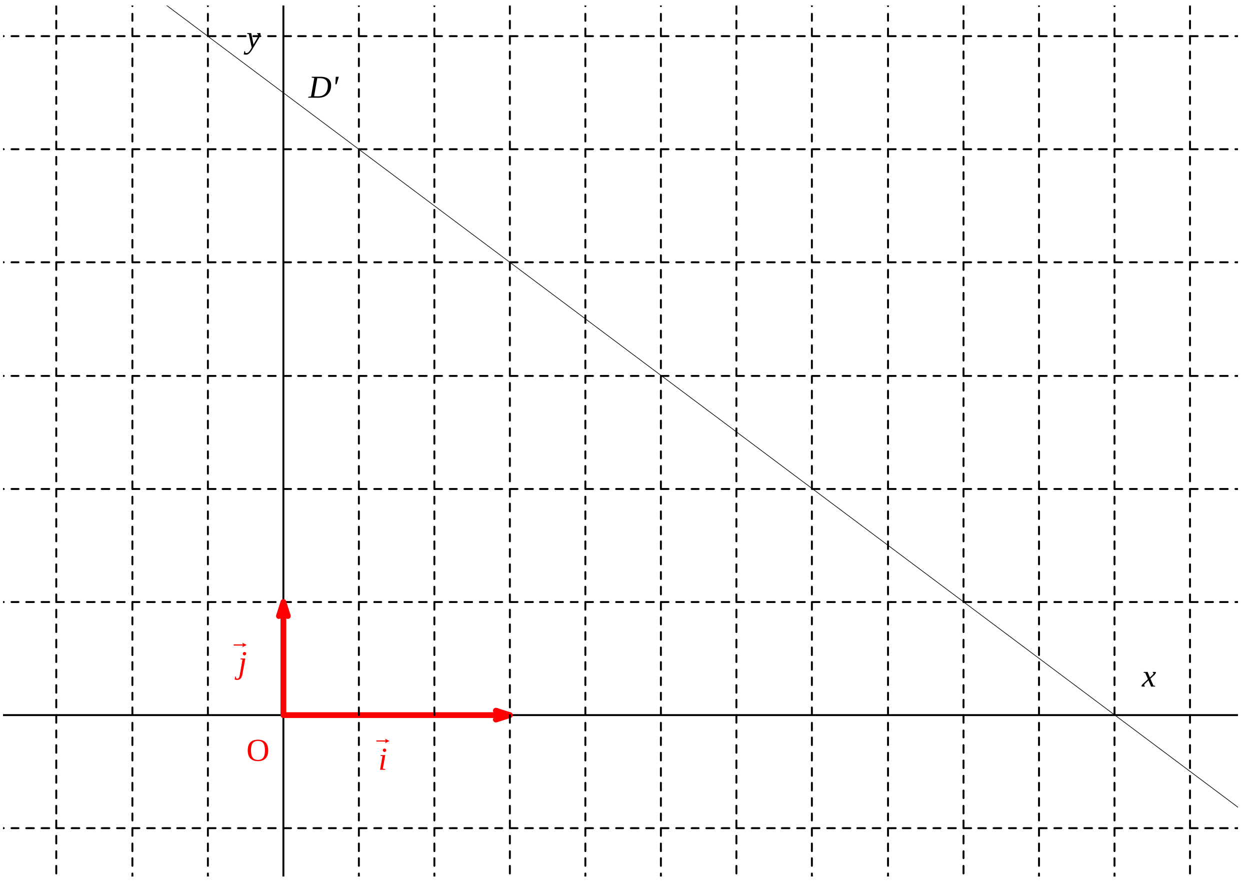
IV. (4 points) Compléter à l'aide des lettres V (pour vrai) ou F (pour faux).

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	
Réponse					

Graphiques de la partie 2

III. Graphique

V. Graphique



Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………..…………………………………… **Note : ….. / 20**

Réponses de la partie 2

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$ ………..................

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ ………..................

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………

………………………………………………………………………………..…………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………

………………………………………………………………………………..…………………………………

2°) ……………………………

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°) ……………………………………………………………………………..……………………………………

……………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………..……………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………

Faire le tableau de variations dans l'espace vide au verso.

2°) …………………………………………………………………………..…………………………………

…………………………………………………………..………………………………………………….

3°) • ……… (une seule réponse pour α sans égalité)   ……… (une seule réponse pour β sans égalité)

• …… (une seule réponse sans égalité)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

1°) …………………………………………………………………………..…………………………………

…………………………………………………………..………………………………………………….

……………………………………………………………………..……………………………………….

…………………………………………………………………………..………………………………….

2°) …………………………………………………………………………..…………………………………

…………………………………………………………..………………………………………………….

…………………………………………………………..………………………………………………….

…………………………………………………………..………………………………………………….

…………………………………………………………..………………………………………………….

3°) …………………………………………………………………………..…………………………………

…………………………………………………………..………………………………………………….

…………………………………………………………..………………………………………………….

…………………………………………………………..………………………………………………….

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) ………

……

……

……

2°) ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 16-11-2022

Partie 1

Dans tous les exercices de cette partie, aucune justification n'est demandée.

I.

Les 3 questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.
Aucune justification n'est demandée.
On se contentera de donner les réponses.

1°) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{x+5}{x+3}$ sont … .

On résout l'équation $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{x+5}{x+3}$ (1).

On commence tout d'abord par observer que – 3 est valeur interdite de l'équation.
L'ensemble de résolution est donc $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Le plus simple est d'utiliser un produit en croix.

$$
\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & (x+3)(x^2+x+1)=(x+5)(x^2+1)\\
\Leftrightarrow\ & x^3+x^2+x+3x^2+3x+3=x^3+x+5x^2+5\\
\Leftrightarrow\ & x^3+4x^2+4x+3=x^3+x+5x^2+5\\
\Leftrightarrow\ & x^2-3x+2=0
\end{aligned}
$$

Les racines du polynôme x^2-3x+2 sont 1 et 2 (utilisation du discriminant ou utilisation des racines évidentes).
On peut les accepter toutes les deux car elles sont différentes de – 3.

Les solutions de (1) sont donc 1 et 2.

On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice.

2°) On considère une fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a \neq 0$.
On sait que son extremum a pour valeur – 1 et que son discriminant est strictement négatif.
Quel est le signe de a ?

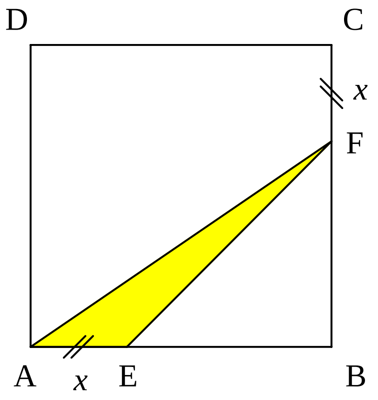
Comme le discriminant de f est strictement négatif, f n'admet aucune racine réelle.
Or f admet un extremum égal à – 1.
Si a était strictement positif, alors cet extremum serait un minimum global.
La fonction f admettrait alors deux racines réelles, ce qui n'est pas possible (on peut se référer à la représentation graphique).
On en déduit que a est strictement négatif.

On peut se référer à une vision graphique en pensant à la représentation graphique de f dans un repère.
C'est une parabole tournée vers le bas.

3°) Soit ABCD un carré de côté 6 cm.
Soit E un point appartenant à [AB] et F un point appartenant à [BC] tels que $AE = CF = x$ cm où x est un réel de l'intervalle $[0\,;6]$.

L'aire du triangle AEF est maximale pour $x = 3$ et est égale, dans ce cas, à $\frac{9}{2}$ cm^2 .

On commence par faire une figure codée assez grande en faisant attention à la disposition des points A, B, C, D.



On effectue la figure pour une valeur particulière de x.
On peut aussi utiliser le compas pour reporter la longueur AE à partir du point C.

Il s'agit d'un problème d'optimisation géométrique.
Un problème d'optimisation, en mathématiques, est un problème où on herche à maximiser ou à minimiser une grandeur (ici, une aire).

Le premier travail à effectuer consiste à exprimer l'aire du triangle AEF en fonction de x.
Nous aurons ensuite une fonction dont nous chercherons le maximum.

Pour calculer l'aire du triangle AEF, on n'a pas le choix : on doit prendre $[AE]$ pour base. La hauteur issue de F est $[BF]$ (extérieure au triangle).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{AEF}} &= \frac{\text{AE}\times\text{BF}}{2}\\ &= \frac{x\times(6-x)}{2}\\ &= \frac{6x-x^2}{2}\\ &= 3x-\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

On a obtenu l'expression de l'aire de AEF en fonction de x.

Autre méthode (beaucoup moins bonne donc à éviter) : $\mathcal{A}_{\text{AEF}} = \mathcal{A}_{\text{ABF}} - \mathcal{A}_{\text{BEF}}$

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x - \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

f admet une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 0$.

f est donc une fonction polynômes du second degré.

Comme le coefficient a est strictement négatif, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=3$.

Ce maximum $f(3)=\dfrac{3\times(6-3)}{2}=\dfrac{9}{2}$.

L'aire du triangle AEF est maximale pour $x=3$. Dans ce cas, E et F sont les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{BC}]$.

Pour vérifier, on peut tracer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

Variantes :

● On pourrait dresser le tableau de variations de f.

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=3$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\searrow$

$$f(3)=\frac{3\times(6-3)}{2}=\frac{9}{2}$$

On pourrait utiliser la dérivée.

D'après le tableau de variations de f, l'aire de AEF est maximale pour $x=3$. Dans ce cas, E et F sont les milieux respectifs de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{BC}]$.

● Pour vérifier, on peut tracer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

II.

Cet exercice est un QCM composé de 6 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une ou plusieurs réponses sont exactes.
Compléter le tableau de la feuille annexe avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucun point n'est retiré en cas de réponse fausse ou en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$ b. $]1\,;+\infty[$ c. $\varnothing$ d. $]-1\,;1[$

On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1) \quad (1)$.

Il s'agit d'une équation avec des logarithmes népériens.
On doit commencer par écrire les conditions d'existence.

Pour que x soit solution de (1), il faut que $\begin{cases} x+3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ (conditions d'existence).

Le système est équivalent à $\begin{cases} x>-3 \\ x>-1 \end{cases}$ soit $x>-1$.

On résout (1) dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

$(1) \Leftrightarrow \ln(x+3) < \ln\left[(x+1)^2\right]$ (on s'arrange pour avoir deux ln de part et d'autre du signe <)

$\Leftrightarrow x+3 < (x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+3 < x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+x-2}_{} > 0$

polynôme du second degré ; on cherche les racines

$\Leftrightarrow x<-2$ ou $x>1$ (les racines du polynôme x^2+x-2 sont – 2 et 1 ; on applique la règle du signe d'un polynôme du second degré ; on peut éventuellement faire un tableau de signes)

Or $x>-1$.

L'ensemble des solutions de (1) est donc l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

On peut tracer les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \ln(x+3)$ et $g : x \mapsto 2\ln(x+1)$ sur l'écran de la calculatrice graphique.
On choisit une bonne fenêtre graphique pour bien voir les deux courbes.

2°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $\mathrm{F} : x \mapsto -\frac{1}{6}\left(x^3+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ b. $\mathrm{F} : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$ c. $\mathrm{F} : x \mapsto -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ d. $\mathrm{F} : x \mapsto x^2\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

On considère la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.

On a $\mathrm{F}(x) = kU(x)$ avec $k=-\frac{1}{2}$ et $U(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}$.

$U(x) = u(x)\times v(x)$ avec $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

On applique les formules de dérivations $(kU)' = kU'$ et $(uv)' = u'v+uv'$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = -\frac{1}{2}\left[2x\mathrm{e}^{-x^2} + \left(x^2+1\right)\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}2x\mathrm{e}^{-x^2}\left[1-\left(x^2+1\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x\mathrm{e}^{-x^2}\left(-x^2\right)$$

$$= x^2 \times x\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$= x^3\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$= f(x)$$

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3°) Soit F une primitive d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$.

Une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $G(x) = F(2x)$ b. $G(x) = 2F(2x)$ c. $G(x) = \frac{1}{2}F(2x)$ d. $G(x) = 2F(x)$

On peut éliminer d'emblée la réponse d car la dérivée de 2F est 2f.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}F(2x)$.

On doit dériver la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = F(2x)$.

On observe que φ est la composée de la fonction $u : x \mapsto 2x$ suivie de la fonction F, ce qui se note $\varphi = F \circ u$.

On applique la formule de dérivation d'une composée $\forall x \in \mathbb{R} \quad (F \circ u)'(x) = u'(x) \times F'\left[u(x)\right]$.

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 2$ et $F' = f$ car F est une primitive de f.

On en déduit l'égalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = 2 \times f(2x)$.

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)$.

On va calculer la dérivée de G.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = \frac{1}{2} \times \varphi'(x)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times f(2x)$

$= f(2x)$

$= g(x)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = g(x)$, G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

4°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln 24 - \ln\frac{3}{2}$ b. $f(2x) = f(x) + \ln 16$ c. $f(2x) = \ln 2 + f(x)$ d. $f(2x) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(2x) = 4\ln(6x)$

$= 4\ln(3x \times 2)$

$= 4\left[\ln(3x) + \ln 2\right]$

$= 4\ln(3x) + 4\ln 2$

$= 4\ln(3x) + \ln 16$

$= f(x) + \ln 16$

On a $\ln 24 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{24}{\frac{3}{2}} = \ln\left(24 \times \frac{2}{3}\right) = \ln 16$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(2x) = f(x) + \ln 24 - \ln\frac{3}{2}$.

5°) Pour tout réel a strictement positif, l'expression $\ln\left(a^2\right) + \ln\frac{\sqrt{a}}{a} + \ln\frac{1}{a^2}$ est égale à :

a. $1 - \frac{\ln a}{2}$ b. $\frac{\ln a}{2}$ c. $3\ln a + \frac{1}{2}$ d. $-\frac{\ln a}{2}$

On pose $A = \ln\left(a^2\right) + \ln\frac{\sqrt{a}}{a} + \ln\frac{1}{a^2}$.

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad A = 2\ln a + \ln\sqrt{a} - \ln a - \ln a^2$

$$= \cancel{2\ln a} + \frac{1}{2}\ln a - \ln a - \cancel{2\ln a}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln a$$

$$= -\frac{\ln a}{2}$$

Autre méthode :

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad A = \ln\left(a^2 \times \frac{\sqrt{a}}{a} \times \frac{1}{a^2}\right)$

$$= \ldots$$

6°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x + 1$. Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la dérivée de f ?

a. $\ln x$ b. $\frac{1}{x} - 1$ c. $\ln x - 2$ d. $\ln x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0$

$$= \ln x + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$= \ln x$$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)
Réponse	b	c	b	a et b	d	a

III.

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau de la feuille annexe avec les lettres a, b, c, d correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucun point n'est retiré en cas de réponse fausse ou en l'absence de réponse.

1°) Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %. Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures b. 8 heures c. 9 heures d. 13 heures

On n'est pas obligé d'introduire une suite.

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 15 % est $1-\frac{15}{100}=0,85$.
Diminuer une quantité de 15 % revient à multiplier par 0,85.

On peut procéder par tâtonnements.

On peut utilise la touche $\boxed{\text{Ans}}$ de la calculatrice.

Après 1 heure	0,85
Après 2 heures	0,7225
Après 3 heures	0,614125
Après 4 heures	0,52200625
Après 5 heures	0,4437053125
Après 6 heures	0,3771495156
Après 7 heures	0,3205770883
Après 8 heures	0,272490525
Après 9 heures	0,2316169463

Certaines valeurs sont des arrondis.

$\frac{1}{4}\text{ L}=0,25\text{ L}$

Autre méthode :

Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le volume d'eau restant dans le récipient (en litre) après *n* heures.

On sait que le récipient contient initialement 1 litre d'eau. On a donc $u_0=1$.

On sait que toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.
Or le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 15 % est $1-\frac{15}{100}=0,85$.
D'où $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=0,85u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q=0,85$.

Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=(0,85)^n$ car $u_0=1$.

On cherche les entiers naturels *n* non nuls tels que $u_n<0,25$ soit $(0,85)^n<0,25\quad(1)$.

La première étape consiste à composer chacun des deux membres par la fonction logarithme népérien.
On a tout fait le droit.

On utilise la fonction logarithme népérien ou la fonction logarithme décimal ou n'importe quelle fonction logarithme de base quelconque.
Le plus logique est toutefois la fonction logarithme népérien.

On utilise l'équivalence fondamentale liée au fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: pour $(a\,;b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $a\leqslant b\;\Leftrightarrow\;\ln a\leqslant\ln b$.

On écrit d'une couleur différente les ln que l'on « rajoute » de part et d'autre.

$$(1) \Leftrightarrow \ln\left[(0,85)^n\right] \leqslant \ln 0,25$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,85 \leqslant \ln 0,25$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 0,25}{\ln 0,85} \quad \text{(en effet, } 0,85 < 1 \text{ donc } \ln 0,85 < 0\text{)}$$

Il est fondamental de bien noter que $\ln 0,85$ est strictement négatif.
Quand on multiplie ou que l'on divise les deux membres d'une inégalité par un réel négatif, le sens de l'inégalité change de sens.
D'après la calculatrice, on a : $\frac{\ln 0,25}{\ln 0,85} = 8,530048563...$ (il est possible de démontrer qu'il s'agit d'un nombre irrationnel).

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $(1) \Leftrightarrow n \geqslant 9$ (car le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\frac{\ln 0,25}{\ln 0,85}$ est 9).

Il faut donc attendre au moins la 9$^{\text{e}}$ heure.

On peut éventuellement utiliser un programme Python.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout entier naturel *n*.
On peut affirmer que la suite (u_n) est :
a. majorée et non minorée. b. minorée et non majorée. c. bornée. d. non majorée et non minorée.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\frac{1}{n+1} \geqslant -1$.
On en déduit l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant u_n \leqslant 1$.

La suite (u_n) est donc bornée.

3°) Soit *k* un réel non nul. Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout entier naturel *n*, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$. On peut affirmer que v_{10} est :

a. positif. b. négatif. c. du signe de *k*. d. du signe de $-k$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \times v_{n+1} < 0$.
Cette inégalité nous permet d'affirmer que deux termes consécutifs v_n et v_{n+1} sont de signes opposés.
Les termes v_{n+1} et v_{n+2} sont également de signes opposés.
Par conséquent, v_n et v_{n+2} sont de même signe pour tout entier naturel *n*.
Ainsi, v_0, v_2, ..., v_{2k} avec $k \in \mathbb{N}$ (tous les termes de rangs pairs), sont de même signe, donc du signe de *k*.
On en conclut que v_{10} est du signe de *k*.

On peut aussi utilise un tableau.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Signe de v_n	k	$-k$	k	$-k$	k	$-k$	k	$-k$	k	$-k$	k

On ne connaît pas le signe.

4°) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $w_0 = 2$ et par la relation de récurrence $4w_{n+1} = w_n$ pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, $w_n =$:

a. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ b. 2^{n+1} c. $\dfrac{1}{2^{2n-1}}$ d. 2^{2n+1}

La relation de récurrence $4w_{n+1} = w_n$ s'écrit $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n$.

On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= 2\times\frac{1}{4^n}$$

$$= 2\times\frac{1}{4^n}$$

$$= 2\times\frac{1}{2^{2n}}$$

$$= 2\times\frac{1}{2^{2n}}$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}}$$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)
Réponse	c	c	c	c

IV.

Pour chaque question, dire si l'affirmation est vraie ou fausse.

1°) Pour tout réel x, e^x, e^{x+1}, e^{x+2} sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + n - 1$ pour tout entier naturel n.
On a : $u_1 = 1$.

3°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 4$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = (n+1)v_n$ pour tout entier naturel n.
La suite (v_n) est géométrique.

4°) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

La suite (w_n) est majorée par 0.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)
Réponse	V	F	F	V

1°) On observe que $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^x$ et que $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{x+1}$.
Donc e^x, e^{x+1}, e^{x+2} sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e.

On peut aussi utiliser la méthode des quotients.

On peut se référer à la vision géométrique des termes consécutifs d'une suite géométrique sur un axe (droite réelle).

2°) On utilise la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + n - 1$ pour $n = 0$.

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_0)^2 + 0 - 1 \\ &= (u_0)^2 - 1 \\ &= (-1)^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 4$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = (n+1)v_n$ pour tout entier naturel n.
La suite (v_n) est géométrique.

On commence par rentrer la suite dans la calculatrice pour avoir une idée du résultat.

Le calcul des termes $v_1 = 4$ et $v_2 = 8$ montre que la suite (v_n) n'est pas géométrique.

4°) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$ pour tout entier naturel *n*.
La suite (w_n) est majorée par 0.

On commence par rentrer la suite dans la calculatrice pour avoir une idée du résultat.

On peut démontrer aisément que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \mathrm{e}^{-n} > 0$ donc la suite (w_n) est bien définie sur $\mathbb{N}^*$.

On va démontrer que tous les termes de la suite sont strictement négatifs.

Soit *n* un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

On procède par inégalités successives.

On a $\mathrm{e}^{-n} > 0$ d'où $1 - \mathrm{e}^{-n} < 1$.

Par conséquent, $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) < \ln 1$ soit $w_n < 0$.

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n < 0$ ce qui permet d'affirmer que la suite (w_n) est majorée par 0.

Partie 2

On fera les graphiques demandés au dos de la feuille de réponses de la partie 1.

I.

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.

1°) On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions : $u_7 = 23$; $u_{13} = -1$.
Soit n un entier naturel quelconque.
Exprimer u_n en fonction de n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 51 - 4n}$$

On note r la raison de la suite (u_n).

On peut écrire $u_{13} = u_7 + (13-7) \times r$ (relation liant deux termes d'une suite arithmétique : $u_n = u_p + (n-p) \times r$) donc on a $u_{13} = u_7 + 6r$ ce qui donne $-1 = 23 + 6r \quad (1)$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 6r = -24 \\
&\Leftrightarrow r = -\frac{24}{6} \\
&\Leftrightarrow r = -4
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_7 + (n-7) \times r$ (il est inutile de repasser par u_0)

$$= 23 + (n-7) \times (-4)$$

$$= 51 - 4n$$

2°) On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions : $v_3 = 4$; $v_7 = \frac{81}{4}$; tous les termes sont strictement positifs.
Soit n un entier naturel quelconque.
Exprimer v_n en fonction de n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}}$$

On note q la raison de la suite (v_n).

Comme tous les termes de la suite sont strictement positifs, nécessairement, on a $q > 0$.

On peut écrire $v_7 = v_3 \times q^{7-3}$ (relation liant deux termes d'une suite géométrique : $v_n = v_p \times q^{n-p}$) donc on a $v_7 = v_3 \times q^4$ ce qui donne $\dfrac{81}{4} = 4 \times q^4 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow q^4 = \frac{81}{16}\\ &\Leftrightarrow \left(q^2\right)^2 = \frac{81}{16}\\ &\Leftrightarrow q^2 = \frac{9}{4}\\ &\Leftrightarrow q = \frac{3}{2} \text{ (car } q > 0\text{)}\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_3 \times q^{n-3}$ (il est inutile de repasser par v_0)

$$= 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \text{ (on peut s'arrêter là)}$$

$$= 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\right]^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 4 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \dfrac{8}{27}$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{32}{27} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \ln\left[1 + (u_n)^2\right]$ pour tout entier naturel *n*.

La suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

1°) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
On attend une rédaction soignée.

On commence par utiliser la calculatrice pour avoir une idée du comportement de la suite :
- soit en utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$;
- soit en rentrant la suite dans la rubrique « Suites ».

On utilise la méthode par différence.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n + \ln\left[1 + (u_n)^2\right] - u_n$

$$= \ln\left[1 + (u_n)^2\right]$$

On doit étudier le signe de $\ln\left[1 + (u_n)^2\right]$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n)^2 \geqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+(u_n)^2 \geqslant 1$.

Par propriété du logarithme népérien pour l'ordre, on a $\ln\left[1+(u_n)^2\right] \geqslant \ln 1$ soit $\ln\left[1+(u_n)^2\right] \geqslant 0$.

La dernière inégalité permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n \geqslant 0$.

On en déduit que (u_n) est croissante.

2°) On considère la fonction Python d'en-tête `def terme(n):` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
    u=-1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+log(1+u**2)
    return u
```

Compléter les pointillés de l'instruction `u=`………… .

On utilisera la fonction log du module math (que l'on suppose importé) qui désigne la fonction logarithme népérien ln en Python.

`u=u+log(1+u**2)` ou `u=u+log(1+u*u)`

III.

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage un protocole de traitement d'une maladie qui consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction *f* définie sur l'intervalle $I=[0\,;10]$ par $f(t)=3t\mathrm{e}^{1-0,5t}$, où *t* désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.
L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ce protocole, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

1°) Démontrer que, pour tout réel $t \in I$, on a : $f'(t)=3(1-0,5t)\mathrm{e}^{1-0,5t}$.
En déduire le tableau de variations de *f* sur *I*.

On doit calculer la dérivée de *f*.

La variable est *t*.

On a $f(t)=kU(t)$ avec $k=3$ et $U(t)=t\mathrm{e}^{1-0,5t}$.

$U(t)=u(t)\times v(t)$ avec $u(t)=t$ et $v(t)=\mathrm{e}^{1-0,5t}$.

On applique les formules de dérivations $(kU)'=kU'$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = 3 \times \left[1 \times \mathrm{e}^{1-0,5t} + t \times \left(-0,5 \times \mathrm{e}^{1-0,5t} \right) \right]$

On garde le 3 à l'extérieur.

$$= 3 \times \left(\mathrm{e}^{1-0,5t} - 0,5t\mathrm{e}^{1-0,5t} \right)$$

$$= 3(1-0,5t)\mathrm{e}^{1-0,5t} \quad \text{(on factorise)}$$

On va devoir étudier le signe de chaque facteur.

3 est strictement positif et $\mathrm{e}^{1-0,5t}$ est toujours strictement positif.

On cherche ensuite pour quelle valeur de t l'expression $1-0,5t$ s'annule.
Pour cela, on résout donc l'équation $1-0,5t=0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 1 = 0,5t$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{0,5}$$
$$\Leftrightarrow t = 2$$

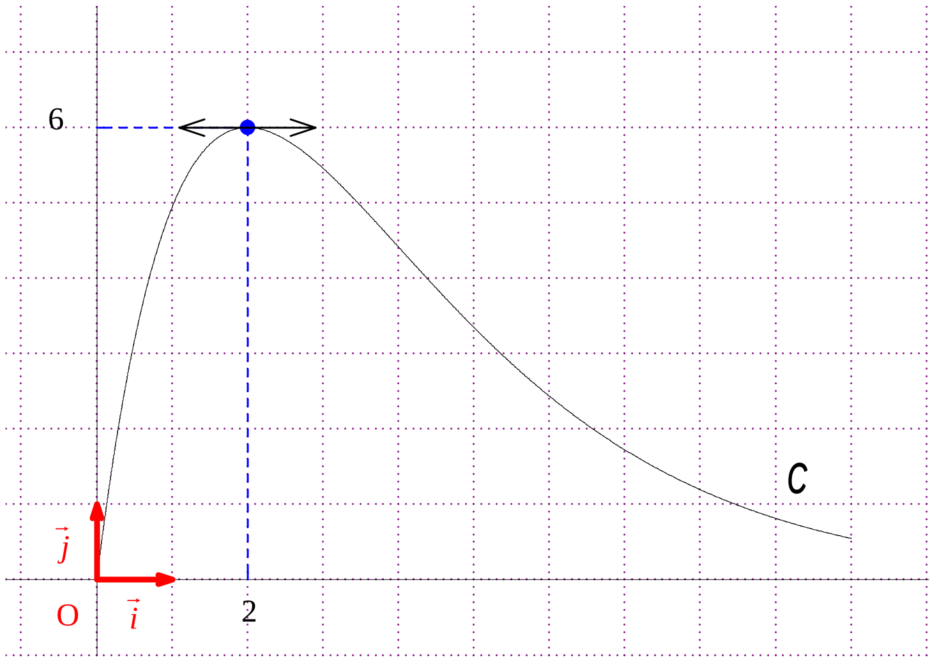
$1-0,5t$ s'annule pour $t=2$.

t	0		2		10
Signe de $1-0,5t$		+	0	−	
Signe de $\mathrm{e}^{1-0,5t}$		+		+	
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30\mathrm{e}^{-4}$

$f(2) = 3 \times 2\mathrm{e}^{1-0,5\times 2} = 6\mathrm{e}^{0} = 6$
$f(0) = 3 \times 0\mathrm{e}^{1-0,5\times 0} = 0$
$f(10) = 3 \times 10\mathrm{e}^{1-0,5\times 10} = 30\mathrm{e}^{1-5} = 30\mathrm{e}^{-4}$ (valeur exacte)

$f(10) = 0,549469...$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
Tracer $\mathcal{C}$ avec soin ainsi que la tangente horizontale.
On prendra le centimètre pour unité graphique.

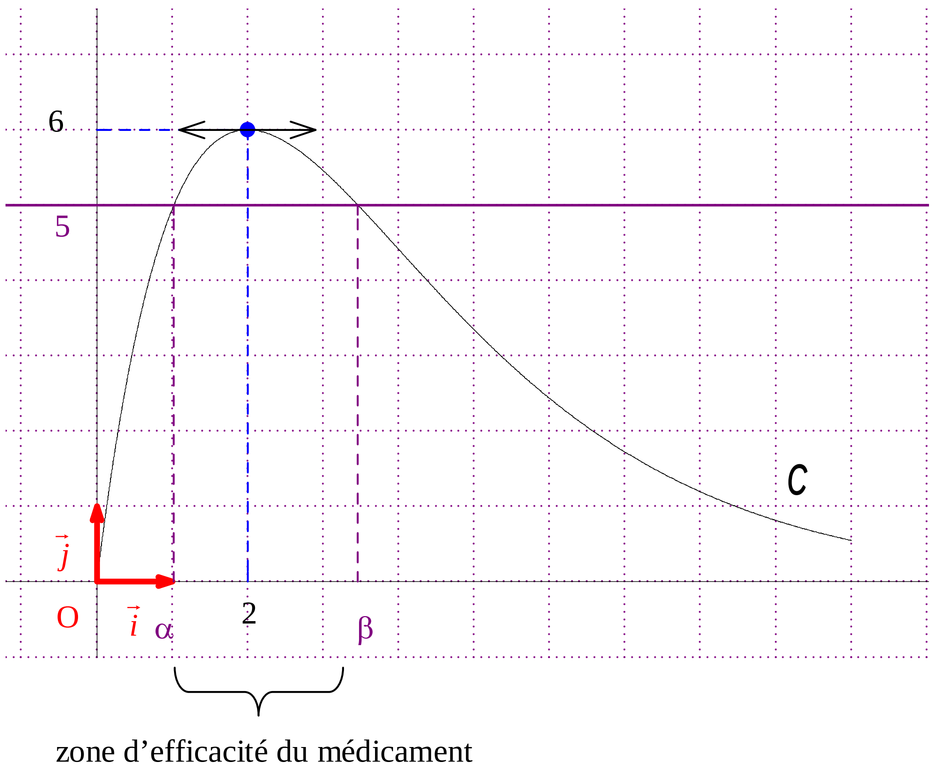


2°) Selon la modélisation considérée dans cet exercice, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

D'après le tableau de variations, *f* admet un maximum global sur *I* égal à 6 atteint pour $t = 2$.

La quantité de médicament présente dans le sang du patient est donc maximale au bout de 2 heures et vaut alors 6 mg.
Le maximum est visible sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de *f* avec une bonne fenêtre graphique.

3°) • On admet que l'équation $f\left(t\right)=5 \quad \left(\text{E}\right)$ admet deux solutions distinctes α et β, avec $\alpha < \beta$, dans l'intervalle *I*.
À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs décimales approchées au millième par défaut de α et β.



L'équation $\left(\text{E}\right)$ [$f\left(t\right)=5$] qu'on considère s'écrit $3te^{1-0,5t}=5$.

On ne peut pas résoudre $\left(\text{E}\right)$ par le calcul.

On utilise donc la calculatrice pour effectuer une résolution approchée.

On va dans la rubrique « Équations » de la calculatrice et on rentre l'équation sous la forme $3x\mathrm{e}^{1-0,5x}=5$.
On limite la recherche des solutions à l'intervalle $[0\,;10]$.

La calculatrice fournit les affichages : 1,022134 et 3,462099

Ainsi, $\alpha=1,02213...$ et $\beta=3,46209...$.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de α est 1,022.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de β est 3,462.

Il s'agit de deux temps en heure.

On ne peut pas trouver les valeurs exactes de α et β.

● On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
On note *d* la durée d'efficacité, en minute, du médicament dans le cas de ce protocole.
Déterminer la valeur arrondie à l'unité de *d*.

D'après le tableau de variations de *f* (éventuellement, la courbe représentative de *f*), $f(t)\geqslant 5 \Leftrightarrow \alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

On calcule $\beta-\alpha$.

Avec la calculatrice, on obtient $\beta-\alpha=2,4399...$.

[On obtient une durée d'efficacité du médicament d'environ 2,44 heures.]

$$\begin{aligned}2\text{ h}+0,4399...\text{ h}&=2\text{ h}+(60\times0,4399...)\text{ min}\\&=120\text{ min}+(60\times0,4399...)\text{ min}\\&=120\text{ min}+26,394...\text{ min}\\&=146,394...\text{ min}\end{aligned}$$

La valeur arrondie à l'unité de *d* est 146.

Avec ce protocole, le médicament a une durée d'efficacité d'environ 146 minutes.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(ax^2+1\right)+b$ définie sur $\mathbb{R}$ où a et b sont des réels fixés, a étant strictement positif.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Dans cette question, on suppose que $a=1$ et que $b=2$.
Quelles sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 3 ?
On donnera les valeurs exactes.

Dans cette question, on a $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+2$.

On doit résoudre l'équation $f(x)=3$ soit $\ln\left(x^2+1\right)+2=3 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)=1 \\
&\Leftrightarrow x^2+1=\mathrm{e} \\
&\Leftrightarrow x^2=\mathrm{e}-1 \\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{\mathrm{e}-1} \text{ ou } x=-\sqrt{\mathrm{e}-1} \quad (\text{car } \mathrm{e}-1>0)
\end{aligned}$$

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 3 sont $\sqrt{\mathrm{e}-1}$ et $-\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

On peut vérifier sur la calculatrice graphique. La calculatrice ne fournit cependant que des valeurs approchées.

2°) Dans cette question, on suppose que $a=1$ et que $b=3-\ln 2$.
On note A le point d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

Dans cette question, on a $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+3-\ln 2$.

On a $f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ et $v(x)=3-\ln 2$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ (formule de dérivation $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$) et $\forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)=0$ (v est une fonction constante)

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)&=\frac{2x}{x^2+1}+0 \\
&=\frac{2x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1)&=\ln\left(1^2+1\right)+3-\ln 2 \\
&=\cancel{\ln 2}+3-\cancel{\ln 2} \\
&=3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(1)&=\frac{2\times 1}{1^2+1} \\
&=\frac{2}{2} \\
&=1
\end{aligned}$$

T a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 3$ (formule donnant une équation de tangente appliquée en situation) soit $y = x + 2$.

On vérifie cette équation en traçant la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran de la calculatrice ainsi que la tangente au point A.

3°) Dans cette question, on suppose que *a* et *b* sont quelconques avec *a* strictement positif.
On rappelle que pour tout réel $u > -1$, on a $\ln(u+1) \leqslant u$.
À l'aide de cette inégalité, démontrer que $\mathcal{C}$ est toujours en dessous de la parabole Γ d'équation $y = ax^2 + b$.

Comme $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 \geqslant 0$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 > -1$.

On peut donc appliquer l'inégalité $\ln(u+1) \leqslant u$ en remplaçant *u* par ax^2 (cela revient à poser $u = ax^2$).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln\left(ax^2+1\right) \leqslant ax^2$

On peut ajouter *b* aux deux membres de cette inégalité.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant ax^2 + b$

Cette dernière inégalité permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ est toujours en dessous de la parabole Γ d'équation $y = ax^2 + b$.

V.

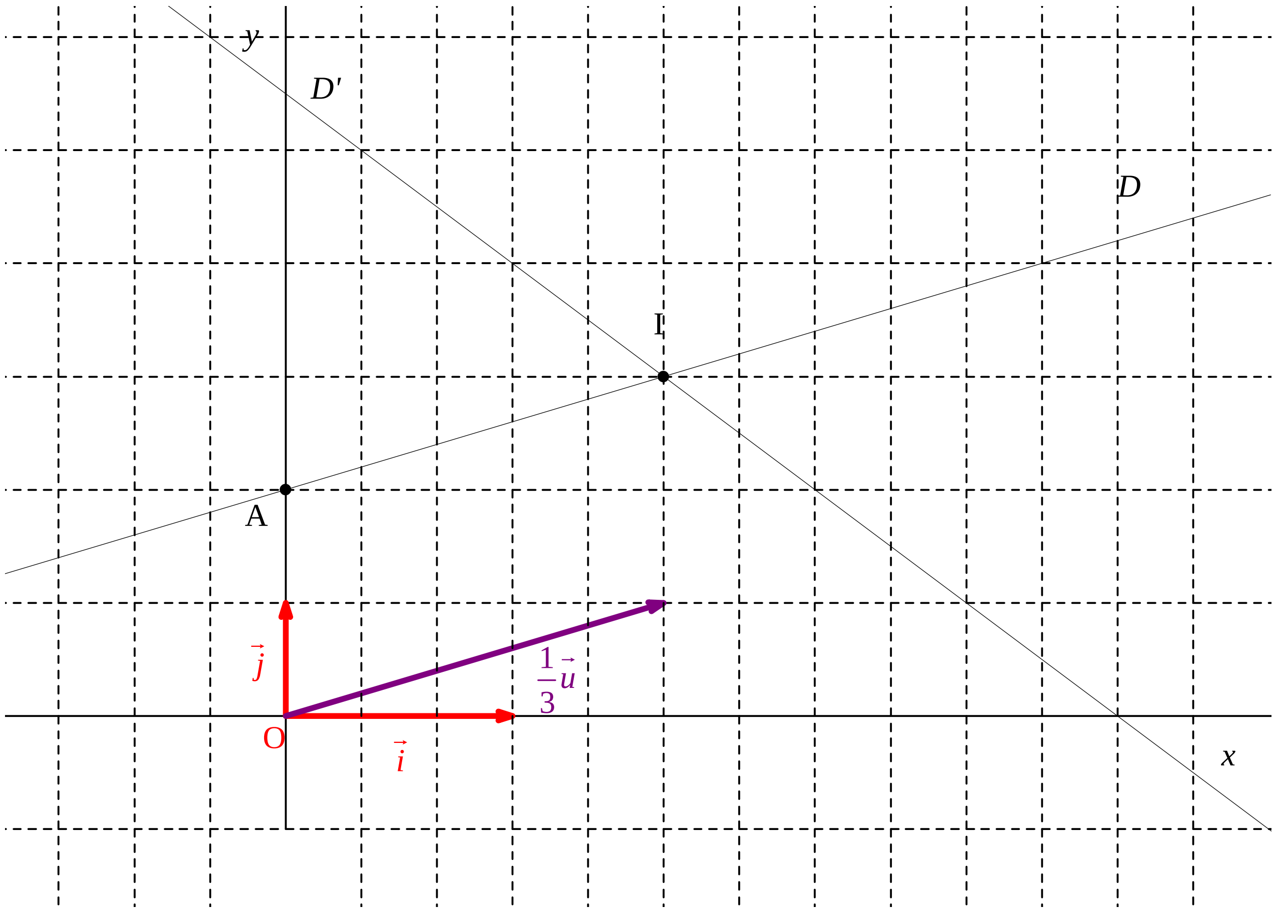
Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note *D* la droite définie par le système d'équations paramétriques

$\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

1°) Préciser les coordonnées du point A de *D* correspondant au paramètre $t = 0$. $\mathrm{A}(0\,;2)$

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de *D*. $\vec{u}\,(5\,;3)$

Tracer *D* sur le graphique de la feuille à part.



Par commodité (manque de place), on a tracé un représentant du vecteur $\frac{1}{3}\vec{u}$.

$$\frac{1}{3}\vec{u}\left(\frac{5}{3}\,;1\right)$$

2°) On note D' la droite d'équation cartésienne $3x+2y-11=0$.
Cette droite est tracée sur le graphique.
On note I le point d'intersection des droites D et D'.
Recopier et compléter la phrase suivante : « Le paramètre t du point I sur la droite D vérifie l'égalité ………… ».
En déduire la valeur de t correspondante. Calculer alors les coordonnées de I et vérifier sur le graphique.

Le paramètre t du point I sur la droite D vérifie l'égalité $3\times 5t+2\times(2+3t)-11=0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 15t+4+6t-11=0\\ &\Leftrightarrow 21t-7=0\\ &\Leftrightarrow t=\frac{7}{21}\\ &\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

On en déduit le calcul des coordonnées de I en remplaçant t par sa valeur dans le système d'équations paramétriques de D.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}}=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\\ y_{\mathrm{I}}=2+3\times\frac{1}{3}=5\end{cases}$$

$I\left(\frac{5}{3}\,;5\right)$

On vérifie sur le graphique.

Méthode astucieuse :

Avec la calculatrice, on peut résoudre directement le système $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2+3t \\ 3x+2y-11=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.
La calculatrice peut le résoudre.