T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 17 février 2023

50 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (-2)^{\mathrm{E}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Le but de cette question est de déterminer la valeur de f sur les intervalles $I_1 = [-1\,;0[$, $I_2 = [0\,;1[$, $I_3 = [1\,;2[$.
Compléter les phrases suivantes :

- $\forall x \in I_1 \quad \mathrm{E}(x) = \ldots.$ donc $\forall x \in I_1 \quad f(x) = \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

- $\forall x \in I_2 \quad \mathrm{E}(x) = \ldots.$ donc $\forall x \in I_2 \quad f(x) = \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

- $\forall x \in I_3 \quad \mathrm{E}(x) = \ldots.$ donc $\forall x \in I_3 \quad f(x) = \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

2°) Sur la feuille annexe, tracer avec le plus grand soin la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1\,;2[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Répondre par oui ou non sans justifier. ….

II. (5 points : 1°) 3 points + 1 point pour la rédaction, l'orthographe, le soin, les notations… ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - \ln x$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On admet que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 8 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [4\,;5]$.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié, en écrivant une idée par ligne.

………..

………..

………..

………..

………..

2°) On note α la solution de (E) dans I.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

…………… (un seul résultat, pas de notation à utiliser)

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$? Répondre par une phrase correctement rédigée.

……..

• Soit a et b deux réels quelconques tels que $a \leqslant b$. On pose $I = [a\,;b]$ et on note J l'image de I par f.

Compléter l'égalité : $J =$ ....

IV. (9 points : 3 points + 3 points + 3 points)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$). On note I le symétrique de D par rapport à C.
On note également P le plan contenant les points A, B, C, D, I et P' le plan contenant les points C, D, G, H, I.
Deux figures sont données sur la feuille annexe. Il est demandé de ne rien écrire dessus en dehors des mesures d'angles sur la figure 2 nécessaires pour le calcul de p_3.

Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DI}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GI}}$.
Présenter le calcul de deux produits scalaires au choix (calculs en colonnes) ; donner la valeur du troisième sans expliquer.
Indication pour p_1 : On commencera par déterminer la nature du triangle BEG.
Indication pour p_2 : On cherchera le projeté orthogonal de H sur P puis on écrira $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{B.....}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DI}}$.
Indication pour p_3 : On cherchera le projeté orthogonal de A sur le plan P' puis on écrira $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{G.....}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GI}}$. On écrira ensuite sur la figure 2 de la feuille annexe les mesures en degré des angles $\widehat{\mathrm{CGD}}$ et $\widehat{\mathrm{CGI}}$.

……..

……..

……..

……..

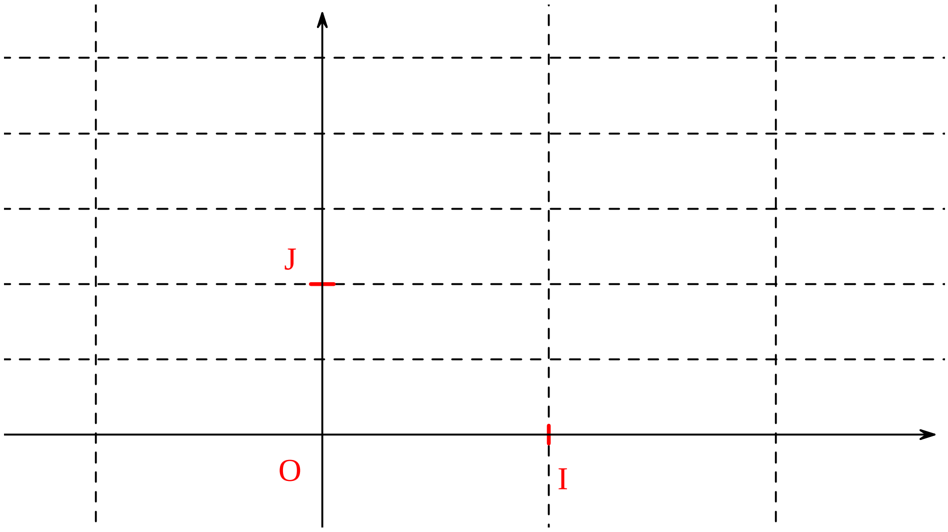
……..

……..

……..

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

I.



IV.

Figure 1

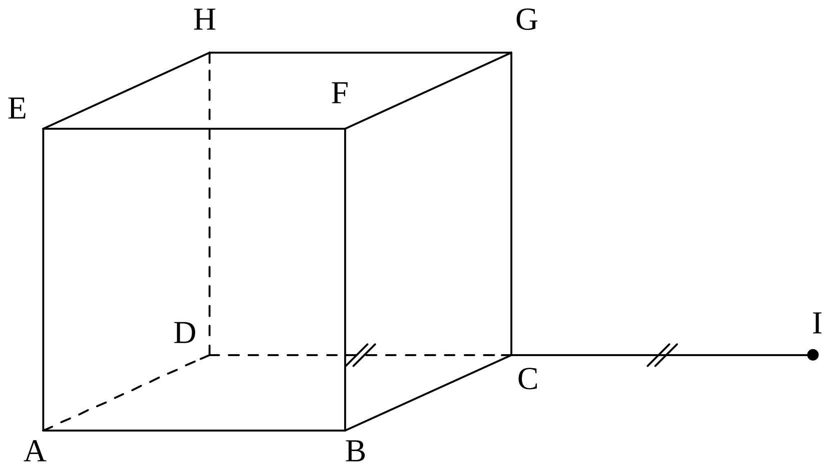
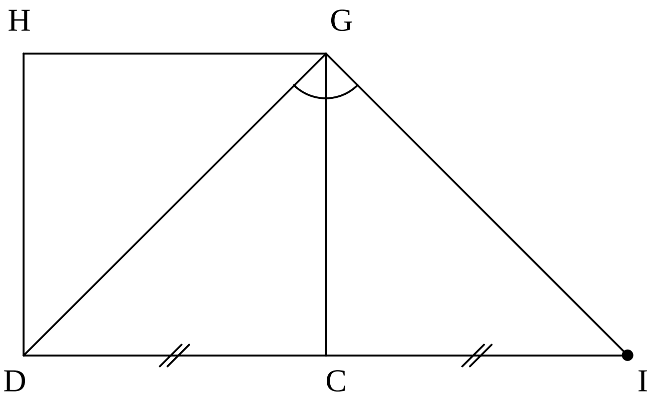


Figure 2



Bonus à rédiger au verso (1 point) :

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé.

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{p}\mathrm{E}(x)\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est périodique.

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-2-2023

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto (-2)^{\mathrm{E}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

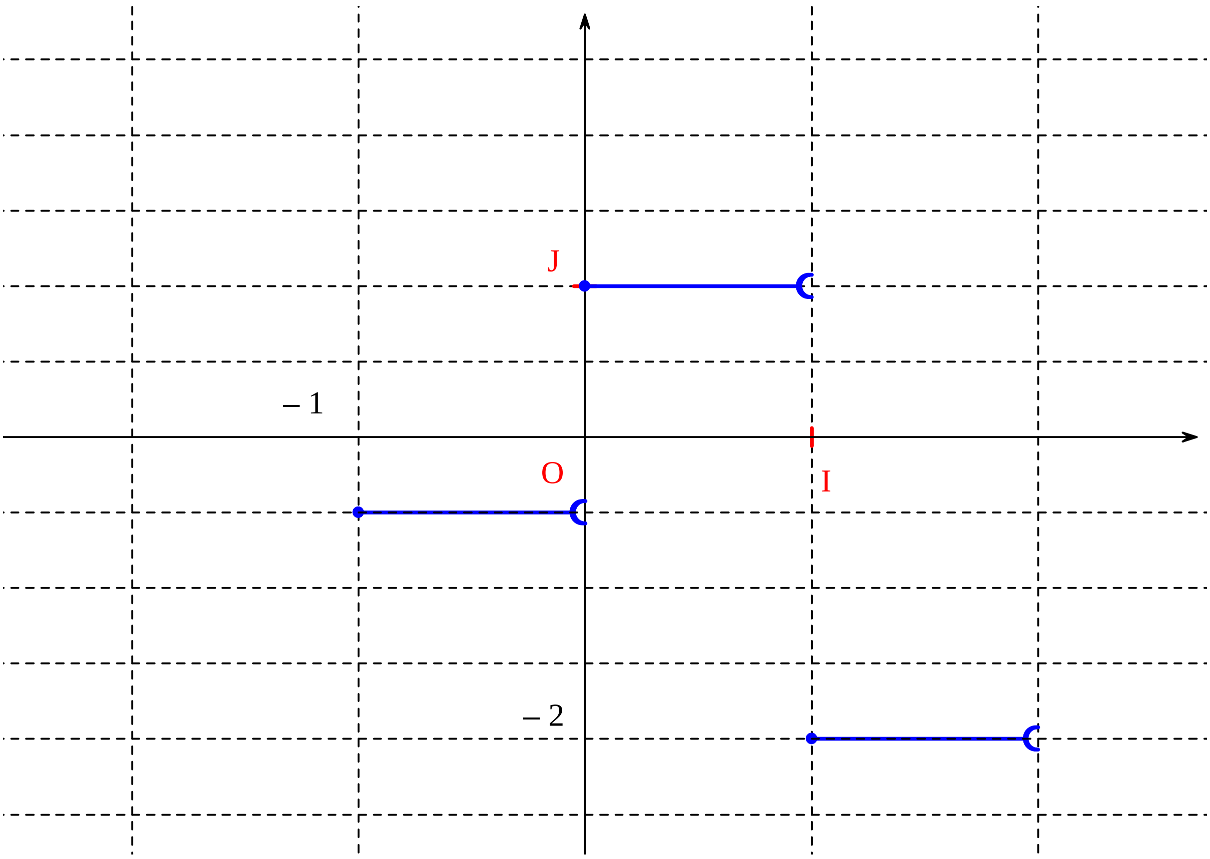
1°) Le but de cette question est de déterminer la valeur de f sur les intervalles $I_1 = [-1\,;0[$, $I_2 = [0\,;1[$, $I_3 = [1\,;2[$.
Compléter les phrases suivantes :

- $\forall x \in I_1 \quad \mathrm{E}(x) = -1$ donc $\forall x \in I_1 \quad f(x) = (-2)^{-1} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$.

- $\forall x \in I_2 \quad \mathrm{E}(x) = 0$ donc $\forall x \in I_2 \quad f(x) = (-2)^0 = 1$.

- $\forall x \in I_3 \quad \mathrm{E}(x) = 1$ donc $\forall x \in I_3 \quad f(x) = (-2)^1 = -2$.

2°) Sur la feuille annexe, tracer avec le plus grand soin la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1\,;2[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.



On vérifie le tracé grâce à la calculatrice en « rentrant » la fonction f (pour la calculatrice Numworks l'expression est notée $(-2)^{\lfloor x \rfloor}$).
La partie entière d'un réel x est notée $\lfloor x \rfloor$ (boîte à outils rubrique Nombres décimaux).
On fait attention aux points d'arrêt.

La fonction f est constante par intervalles (elle est constante sur tout intervalle de la forme $[n\,;n+1[$ avec n entier relatif). La représentation graphique de f est donc constituée de segments de droites horizontaux fermés à gauche et ouverts à droite.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Répondre par oui ou non sans justifier. non

La fonction f est discontinue en tout entier relatif.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - \ln x$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

On admet que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 8 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [4\,;5]$.

Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié, en écrivant une idée par ligne.

(E) s'écrit explicitement $2x - \ln x = 8$.

On ne fera rien cependant de cela dans cette question.

On utilise la « méthode des 3 C ».

C_1 : f est continue sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ (comme différence de fonctions continues sur cet intervalle) donc, par restriction, sur l'intervalle I, car $I \subset \left]0\,;+\infty\right[$

On peut justifier la continuité de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$ de la manière suivante :

La fonction $u : x \mapsto 2x$ est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

La fonction $v : x \mapsto \ln x$ est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Par différence, f est continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

C_2 : On a $f(4) = 8 - \ln 4$ et $f(5) = 10 - \ln 5$.

La calculatrice donne $f(4) = 6{,}61370563...$ et $f(5) = 8{,}390562087...$, ce qui permet de voir que $8 \in \left[f(4)\,;f(5)\right]$ (autrement dit, 8 est une « valeur intermédiaire »).

C_3 : f est <u>strictement</u> croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ donc, par restriction, sur l'intervalle I.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle I.

Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence, la condition C_3 assure l'unicité.

2°) On note α la solution de (E) dans *I*.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de α.

4,782 (un seul résultat, pas de notation à utiliser)

En résolvant l'équation (E) avec la calculatrice (équation qui s'écrit $2x - \ln x = 8$), on obtient l'affichage : 4,78248.
La valeur arrondie au millième de α est donc 4,782.

On se garde bien d'écrire $\alpha = 4{,}782$.

On n'écrit pas $\alpha = 4{,}782$.

Il n'y a aucun moyen de résoudre l'équation (E) de manière exacte.
On ne peut donc pas donner la valeur exacte de α.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Quel est le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$? Répondre par une phrase correctement rédigée.

1ère méthode : très bonne méthode

On utilise la composée, en utilisant la propriété rappelée ci-dessous.

> Soit u une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
>
> On note $\exp \circ u = \mathrm{e}^u$.
>
> Si u est croissante sur E, alors la fonction e^u est croissante sur E.
> Si u est décroissante sur E, alors la fonction e^u est décroissante sur E.
>
> Autrement dit, e^u a le même sens de variation que u.

On considère la fonction $u : x \mapsto -x$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine dont le coefficient de x est strictement négatif).

On en déduit que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2e méthode : bonne méthode

On utilise la dérivée.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) < 0$.

On en déduit que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3[e] méthode : méthode peu naturelle, mais possible…

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ et on utilise la propriété du sens de variation de l'inverse d'une fonction rappelée ci-dessous :

> Soit *u* une fonction définie sur un intervalle *I*, telle que $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \neq 0$ et $u(x)$ soit de signe constant sur *I*.
> La fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ a les variations contraires de *u* sur *I*.

Il s'agit d'un cas particulier de composée : composée de la fonction u suivie de la fonction inverse.

On considère la fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

> On ne demande pas de faire le tableau de variations de *f* sur $\mathbb{R}$.

• Soit *a* et *b* deux réels quelconques tels que $a \leqslant b$. On pose $I = [a\,;b]$ et on note *J* l'image de *I* par *f*.

Compléter l'égalité : $J = \left[\mathrm{e}^{-b}\,;\mathrm{e}^{-a}\right]$.

Par définition, $J = f(I)$.

Comme *f* est décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, on a $J = \left[f(b);\ f(a)\right]$, soit $J = \left[\mathrm{e}^{-b}\,;\mathrm{e}^{-a}\right]$.

On peut faire un graphique en traçant la courbe représentative de *f*.
Il est alors facile de faire apparaître l'intervalle *I* sur l'axe des abscisses et l'intervalle *J* sur l'axe des ordonnées.

IV.

Soit ABCDEFGH un cube d'arête *a* ($a \in \mathbb{R}_+^*$). On note I le symétrique de D par rapport à C.
On note également *P* le plan contenant les points A, B, C, D, I et P' le plan contenant les points C, D, G, H, I.
Deux figures sont données sur la feuille annexe. Il est demandé de ne rien écrire dessus en dehors des mesures d'angles sur la figure 2 nécessaires pour le calcul de p_3.

Calculer les produits scalaires $p_1 = \overrightarrow{\mathrm{BE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}}$, $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DI}}$, $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GI}}$.
Présenter le calcul de deux produits scalaires au choix (calculs en colonnes) ; donner la valeur du troisième sans expliquer.
Indication pour p_1 : On commencera par déterminer la nature du triangle BEG.
Indication pour p_2 : On cherchera le projeté orthogonal de H sur *P* puis on écrira $p_2 = \overrightarrow{\mathrm{B.....}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DI}}$.
Indication pour p_3 : On cherchera le projeté orthogonal de A sur le plan P' puis on écrira $p_3 = \overrightarrow{\mathrm{G.....}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GI}}$. On écrira ensuite sur la figure 2 de la feuille annexe les mesures en degré des angles $\widehat{\mathrm{CGD}}$ et $\widehat{\mathrm{CGI}}$.

• Calcul de p_1 :

1ère méthode :

On a $\mathrm{BE}=\mathrm{EG}=\mathrm{BG}=a\sqrt{2}$ (longueur de la diagonale d'un carré de côté *a*) donc le triangle BEG est équilatéral.

Tous les angles de BEG mesurent donc

$$p_1=\mathrm{BE}\times\mathrm{BG}\times\cos\widehat{\mathrm{EBG}}$$

$$=a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}\times\cos 60°$$

$$=\cancel{2}a^2\times\frac{1}{\cancel{2}}$$

$$=a^2$$

2e méthode :

On décompose les vecteurs grâce à la relation de Chasles.

$$p_1=\left(\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}\right)\bullet\left(\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}\right)$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{BF}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{FG}}\quad\text{(bilinéarité du produit scalaire)}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{BF}}^2+0+0+0$$

$$=\mathrm{BF}^2$$

$$=a^2$$

• Calcul de p_2 :

1ère méthode :

$$p_2=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{DI}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{DI}}\quad\text{(car D est le projeté de orthogonal de H sur } P\text{)}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{DI}}\quad\text{(car C est le projeté orthogonal de B sur la droite } (\mathrm{DI})\text{)}$$

$$=-\,\mathrm{CD}\times\mathrm{DI}\quad\text{(car les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{DI}} \text{ sont colinéaires de sens contraires)}$$

$$=-\,a\times 2a$$

$$=-\,2a^2$$

2^e^ méthode :

$p_2 = \overrightarrow{\mathrm{BH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{BD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}$ (car D est le projeté de orthogonal de H sur *P*)

$= \left(-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right) \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}$

$= -\left(\overrightarrow{\mathrm{DB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}\right)$ (propriété du produit scalaire)

$= -\,\mathrm{BD} \times \mathrm{BI} \times \cos \widehat{\mathrm{BDI}}$

$= -\,a\sqrt{2} \times 2a \times \cos 45°$

$= -\,a\cancel{\sqrt{2}} \times 2a \times \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$= -\,2a^2$

3^e^ méthode :

$p_2 = \overrightarrow{\mathrm{BH}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{BD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DI}}$ (car D est le projeté de orthogonal de H sur *P*)

$= a\sqrt{2} \times 2a \times \cos 135°$ (on détermine la mesure en degré de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DI}}$ en faisant une figure dans le plan ; on peut par exemple créer le point J tel que $\overrightarrow{\mathrm{BJ}} = \overrightarrow{\mathrm{DI}}$)

$= a\cancel{\sqrt{2}} \times 2a \times \left(-\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$

$= -\,2a^2$

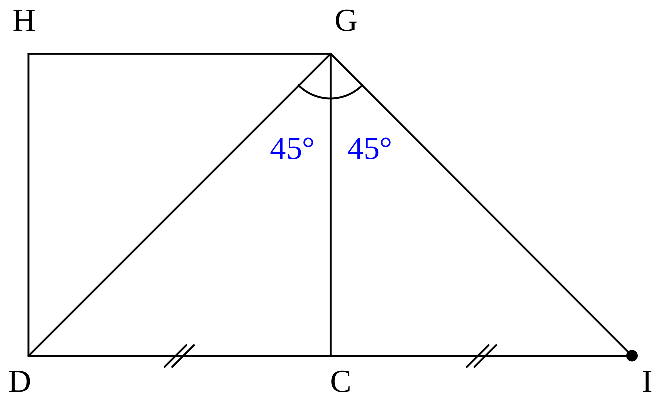
• Calcul de p_3 :

1ère méthode :

$p_3 = \overrightarrow{GA} \bullet \overrightarrow{GI}$

$= \overrightarrow{GD} \bullet \overrightarrow{DI}$ (car D est le projeté de orthogonal de A sur P')

$= 0$ (car l'angle $\widehat{DGI}$ est droit comme on le voit sur la figure ci-dessous et, par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{DI}$ en faisant une figure dans le plan)



Comme $p_3 = 0$, on peut affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont orthogonaux.

2e méthode :

On décompose les vecteurs grâce à la relation de Chasles.

$p_3 = \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA}\right) \bullet \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}\right)$

$= \overrightarrow{GC} \bullet \overrightarrow{GC} + 0 + 0 + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CI}$

$= \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CI}$ (projection orthogonale)

$= a^2 - a \times a$

$= a^2 - a^2$

$= 0$

Bonus :

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé.

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{p}\mathrm{E}(x)\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est périodique.

On va démontrer que f est périodique de période $2p$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a : $f(x+2p)=f(x)$.

On va utiliser la propriété suivante de la partie entière :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{Z}\quad \mathrm{E}(x+n)=\mathrm{E}(x)+n}$$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+2p)=\cos\left(\dfrac{\pi}{p}\mathrm{E}(x+2p)\right)$

$=\cos\left[\dfrac{\pi}{p}\left(\mathrm{E}(x)+2p\right)\right]$ (propriété de la partie entière rappelée ci-dessus vu que $2p\in\mathbb{Z}$)

$=\cos\left[\dfrac{\pi}{p}\mathrm{E}(x)+2\pi\right]$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{p}\mathrm{E}(x)\right)$ (propriété de la fonction cosinus : la fonction cosinus est périodique de période 2π)

$= f(x)$

Conclusion : La fonction f est périodique de période $2p$.

Complément :

La fonction f est constante par intervalles.