**T spé**

# Contrôle du mercredi 18 janvier 2023 (2 heures)

## I. (2 points : 1 point + 1 point)

On s'intéresse aux individus possédant les deux allèles d'un gène, notés A et a. L'allèle A est supposé dominant et l'allèle a récessif.
Les deux allèles se répartissent le long du gène selon 4 configurations possibles : A-A, A-a, a-A et a-a. On admet que ces répartitions sont aléatoires et équiprobables.
Les individus dont le génotype contient au moins un allèle A présentent l'expression dominante ; ceux de génotype aa présentent l'expression récessive.
Un couple a trois enfants.
Quelle est la probabilité que les trois enfants présentent l'expression récessive ?
Quelle est la probabilité qu'au moins un des enfants présente l'expression récessive ?
On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale.

---

## II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux jeux pour lesquels on dispose d'une urne contenant $n$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à $n$, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Dans les programmes Python considérés, on suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) **Jeu 1**
Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 2$.
Le joueur tire au hasard une boule dans l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée est 1 ou 2.
Compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu_1(n):` donnée dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu.

```
def jeu_1(n):
    r=randint(1,n)
    if …………………………… :
      return('gagné')
    else:
      return('perdu')
```

2°) **Jeu 2**
Le joueur tire au hasard successivement, avec remise, deux boules dans l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée au premier tirage est inférieur ou égal au numéro de la boule tirée au deuxième tirage.
Compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu_2(n):` donnée dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu.

```
def jeu_2(n):
    r1,r2=randint(1,n),randint(1,n)
    if ……………….. :
      return('gagné')
    else:
      return('perdu')
```

**Bonus sur 1 point :**
Quelle est la probabilité de gagner au jeu 2 ?
On donnera la réponse sous la forme d'un quotient en fonction de $n$, sans écrire d'égalité.

---

## III. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points)

On s'intéresse à un jeu pour lequel on dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules bleues et 6 boules jaunes.
Pour une partie, le joueur doit miser 2 €. Il prélève ensuite une boule au hasard dans l'urne.
• Si la boule prélevée est rouge, le joueur reçoit 8 €.
• Si la boule prélevée est bleue, le joueur reçoit 4 €.
• Si la boule prélevée est jaune, le joueur ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euro, c'est-à-dire le montant reçu diminué de la mise.

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On se contentera d'écrire une ligne de calcul dans chaque cas.
On donnera les résultats sous forme décimale.

2°) L'organisateur du jeu veut le modifier pour qu'il lui devienne favorable. Il décide alors d'ajouter des boules jaunes dans l'urne.
Combien de boules jaunes doit-il ajouter dans l'urne pour que l'espérance de X soit égale à $-1$ ?

---

## IV. (4 points)

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue circulaire comportant quatre secteurs blancs et huit secteurs noirs et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, indiscernables au toucher.
Tous les secteurs de la roue font le même angle. Ils ont donc tous la même probabilité d'être obtenus lorsque l'on fait tourner la roue.

### Partie A (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

L'organisateur demande au joueur de faire tourner la roue, puis d'extraire au hasard un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :
• si le secteur obtenu est blanc, alors il extrait un jeton du sac ;
• si le secteur obtenu est noir, alors il extrait successivement et avec remise deux jetons du sac.
Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.
1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.
2°) Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un secteur blanc en lançant la roue ?
On donnera la valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

### Partie B (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

L'organisateur décide de modifier le jeu.
Le joueur fait tourner la roue, puis extrait au hasard un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :
• si le secteur obtenu est blanc, alors il extrait un jeton du sac ;
• si le secteur obtenu est noir, alors il extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.
Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.
On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.
1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.
2°) Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un secteur blanc en lançant la roue ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

**V. (2 points)**

Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent à la cantine à l'un ou l'autre des deux services avec une probabilité égale de manger au premier ou au second service.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui déjeunent au premier service.

Compléter la phrase : X suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots\ldots\ldots$ et $p = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Calculer la probabilité que le nombre de personnes déjeunant au premier service soit supérieur ou égal à 240.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Calculer la probabilité que le nombre de personnes déjeunant à chaque service soit inférieur ou égal à 270.
On donnera la valeur arrondie au millième.

---

**VI. (1 point)**

Déterminer le réel $x$ tel que les nombres $\mathrm{e}^{x}$, $-1$, $\mathrm{e}^{x+2}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

---

**VII. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$.

1°) Démontrer que l'intervalle $I = [0\,;1]$ est stable par $f$, c'est-à-dire que pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$.

2°) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où $a$ est un réel quelconque de l'intervalle $I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.
On ne cherchera pas à exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

- Expliquer pourquoi (sans calculs) tous les termes de la suite appartiennent à $I$.
- Déterminer le sens de variation de $(u_n)$.
- En déduire que $(u_n)$ converge.
- On note $\mathscr{l}$ sa limite. Écrire une égalité vérifiée par $\mathscr{l}$ puis déterminer la valeur de $\mathscr{l}$.

3°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = 0,2$.
La fonction Python d'en-tête `def terme(n):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et a pour objectif de renvoyer la valeur de $u_n$.

```
def terme(n):
    u=0.2
    for i in range(1,n+1):

        u=…………

    return u
```

Compléter l'instruction manquante (ligne u=…………).

# Consignes générales à lire avant de commencer

On portera une attention toute particulière aux points suivants :

- Orthographe (majuscules en début de phrases, accords de verbes et de noms etc.) ;
- Écriture (lettres et chiffres doivent être très lisibles et ne pas prêter à confusion) ;
- Rédaction (verbe avec sujet, verbe, complément, une idée par ligne etc.) ;
- Présentation (calculs bien présentés, résultats bien mis en évidence, absence de ratures etc.).

Tout manquement ou laisser-aller sera pénalisé.

**Numéro : …..** **Prénom et nom :** ……………..………………………………

**Note : ….. / 20**

**I. (2 points : 1 point + 1 point)** 1°) ………................ 2°) ………................

---

**II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)** 1°) `if` ……………………..….. : 2°) `if` ……………………..….. :

---

**III. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points)**

1°) ……………………………………………………………………..…………………………………

……………………………………………………………..………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………..…………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

……………………………………………………………..………………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

……………………………………………………………………..………………………………………

---

**IV. (4 points)**

Partie A : 1°) ……………… (une seule réponse sans égalité) 2°) ……………… (une seule réponse sans égalité)

Partie B : 1°) ……………… (une seule réponse sans égalité) 2°) ……………… (une seule réponse sans égalité)

**V. (2 points)**

X suit la loi binomiale de paramètres $n =$.......... et $p =$.............

……………… (une seule réponse sans égalité) ……………… (une seule réponse sans égalité)

---

**VI. (1 point)**

……… (une seule réponse sans égalité)

---

**VII. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)**

1°) ……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

3°) u=…………

# Corrigé du contrôle du 18-1-2023

## I.

On s'intéresse aux individus possédant les deux allèles d'un gène, notés A et a. L'allèle A est supposé dominant et l'allèle a récessif.
Les deux allèles se répartissent le long du gène selon 4 configurations possibles : A-A, A-a, a-A et a-a. On admet que ces répartitions sont aléatoires et équiprobables.
Les individus dont le génotype contient au moins un allèle A présentent l'expression dominante ; ceux de génotype aa présentent l'expression récessive.
Un couple a trois enfants.
Quelle est la probabilité que les trois enfants présentent l'expression récessive ?
Quelle est la probabilité qu'au moins un des enfants présente l'expression récessive ?
On donnera les résultats en valeur exacte sous forme décimale.

0,015625 0,578125

D'après l'énoncé, la probabilité qu'un enfant présente l'expression récessive du gène considéré est égale à 0,25.

On note $P$ la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

On note E l'événement « Les trois enfants présentent l'expression récessive »
et F l'événement « Au moins un des enfants présente l'expression récessive ».

● Calcul de la probabilité de E :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= \left(\text{probabilité qu'un enfant présente l'expression récessive}\right)^3 \quad \text{(principe multiplicatif)} \\ &= (0,25)^3 \\ &= 0,015625 \quad \text{(nombre décimal, valeur exacte)} \end{aligned}$$

● Calcul de la probabilité de F :

Le plus simple est de passer par l'événement contraire.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{F}) &= 1 - P\left(\overline{\mathrm{F}}\right) \\ &= 1 - P\left(\text{« aucun enfant ne présente l'expression récessive »}\right) \\ &= 1 - \left(\text{probabilité qu'un enfant ne présente pas l'expression récessive}\right)^3 \\ &= 1 - (0,75)^3 \\ &= 0,578125 \end{aligned}$$

Si on utilise des écritures fractionnaires, $P(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{64}$ et $P(\mathrm{F}) = \dfrac{37}{64}$.

Autres façons de faire :

① On peut noter S l'événement : « L'enfant présente l'expression récessive ».

Ensuite, on fait un arbre de Bernoulli.

L'événement E correspond au chemin S-S-S.
L'événement F correspond à tous les chemins sauf le chemin $\overline{\mathrm{S}}$-$\overline{\mathrm{S}}$-$\overline{\mathrm{S}}$.

② On peut aussi noter X la variable aléatoire qui compte le nombre d'enfants qui présente l'expression récessive du gène.

X suit la loi binomiale de paramètres 3 (nombre de répétitions) et 0,25 (probabilité que l'enfant présente l'expression récessive du gène).

$$P(\text{E}) = P(\text{X} = 3)$$

$$P(\text{F}) = P(\text{X} \geqslant 1)$$

---

**II.**

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux jeux pour lesquels on dispose d'une urne contenant $n$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à $n$, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Dans les programmes Python considérés, on suppose que la fonction `randint` de la bibliothèque `random` a été préalablement importée.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) **Jeu 1**
Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 2$.
Le joueur tire au hasard une boule dans l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée est 1 ou 2.
Compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu_1(n):` donnée dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu.

```
def jeu_1(n):
    r=randint(1,n)
    if r==1 or r==2:
      return('gagné')
    else:
      return('perdu')
```

Autre possibilité : `r<=2`

2°) **Jeu 2**
Le joueur tire au hasard successivement, avec remise, deux boules dans l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée au premier tirage est inférieur ou égal au numéro de la boule tirée au deuxième tirage.
Compléter la fonction Python d'en-tête `def jeu_2(n):` donnée dans le cadre ci-dessous afin qu'elle permette de simuler une partie de ce jeu.

```
def jeu_2(n):
    r1,r2=randint(1,n),randint(1,n)
    if r1<=r2:
      return('gagné')
    else:
      return('perdu')
```

**Bonus sur 1 point :**
Quelle est la probabilité de gagner au jeu 2 ?
On donnera la réponse sous la forme d'un quotient en fonction de *n*, sans écrire d'égalité.

L'univers des possibles de l'expérience aléatoire est $\Omega = [\![1\,;n]\!]^2$.

On note $P$ la probabilité uniforme sur $\Omega$ (situation d'équiprobabilité).

On note A l'événement : « Le joueur gagne au jeu ».

Calculons $P(\text{A})$.

On a $P(\text{A}) = \dfrac{\text{card A}}{\text{card }\Omega}$.

On a donc $\text{card }\Omega = n^2$.

Les tirages possibles pour A sont :
$(1\,;1)$, $(1\,;2)$, …, $(n-1\,;n)$ $\rightarrow$ $n$ couples
$(2\,;2)$, $(2\,;3)$, $(2\,;n)$ $\rightarrow$ $n-1$ couples

$(n\,;n)$ $\rightarrow$ 1 couple

$$\text{card A} = \underbrace{n+(n-1)+...+1}_{\text{somme des entiers naturels de 1 à } n}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(formule fondamentale du cours)}$$

$$P(\text{A}) = \frac{\text{card A}}{\text{card }\Omega}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

On vérifie aisément que $\dfrac{n+1}{2n} \leqslant 1$

**III.**

On s'intéresse à un jeu pour lequel on dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules bleues et 6 boules jaunes.
Pour une partie, le joueur doit miser 2 €. Il prélève ensuite une boule au hasard dans l'urne.
• Si la boule prélevée est rouge, le joueur reçoit 8 €.
• Si la boule prélevée est bleue, le joueur reçoit 4 €.
• Si la boule prélevée est jaune, le joueur ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euro, c'est-à-dire le montant reçu diminué de la mise.

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On se contentera d'écrire une ligne de calcul dans chaque cas.
On donnera les résultats sous forme décimale.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = 7{,}2$$

On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité $P$.

Les valeurs prises par X sont $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

| $x_i$ | 6 | 2 | $-2$ |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{6}{10}$ |

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= 6\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{3}{10} - 2\times\frac{6}{10}\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme l'espérance de X est égale à 0, on peut dire que le jeu est équitable.

Pour calculer la variance, on peut utiliser soit la formule de définition soit la formule de König-Huygens.

La deuxième méthode est préférable.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= 6^2\times\frac{1}{10} + 2^2\times\frac{3}{10} + (-2)^2\times\frac{6}{10} - 0^2 \quad \text{(avec la formule de König-Huygens : } \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2\text{)}\\ &= 7{,}2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= (6-0)^2\times\frac{1}{10} + (2-0)^2\times\frac{3}{10} + (-2-0)^2\times\frac{6}{10} \quad \text{(avec la formule de définition)}\\ &= 7{,}2\end{aligned}$$

2°) L'organisateur du jeu veut le modifier pour qu'il lui devienne favorable. Il décide alors d'ajouter des boules jaunes dans l'urne.
Combien de boules jaunes doit-il ajouter dans l'urne pour que l'espérance de X soit égale à − 1 ?

Soit $x$ le nombre de boules jaunes que l'on ajoute dans l'urne.

Le nombre de boules rouges et bleues ne change pas.

L'urne contient :
1 boule rouge
3 boules bleues
$6+x$ boules jaunes.

Le nombre total de boules dans l'urne est alors $x+10$.

On commence par chercher la nouvelle loi de probabilité de X :

| $x_i$ | 6 | 2 | − 2 |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X}=x_i)$ | $\dfrac{1}{x+10}$ | $\dfrac{3}{x+10}$ | $\dfrac{6+x}{x+10}$ |

On calcule alors l'espérance de X en fonction de $x$.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{6}{10+x}+\frac{6}{10+x}-\frac{2\times(6+x)}{10+x}$$

$$=\frac{12-12-2x}{10+x}$$

$$=\frac{-2x}{10+x}$$

$$=-\frac{2x}{10+x}$$

On observe que $\mathrm{E}(\mathrm{X})\leqslant 0$ quelle que soit la valeur de $x$.
La technique du π sur calculatrice permet de vérifier ce calcul.

On cherche $x$ tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X})=-1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-2x}{10+x}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{10+x}=1$$

$$\Leftrightarrow 2x=10+x$$

$$\Leftrightarrow x=10$$

Il faut ajouter 10 boules jaunes.

## IV.

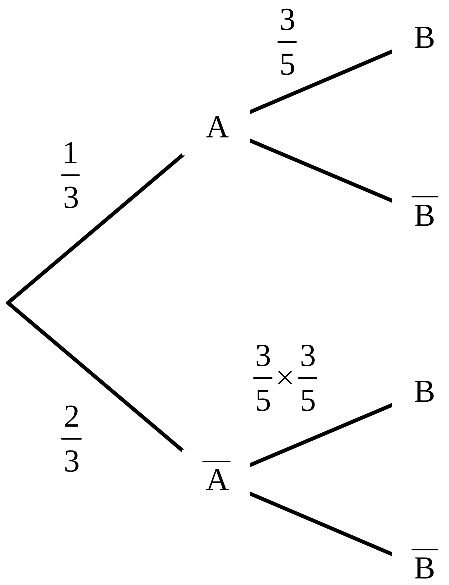
Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue circulaire comportant quatre secteurs blancs et huit secteurs noirs et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5, indiscernables au toucher.
Tous les secteurs de la roue font le même angle. Ils ont donc tous la même probabilité d'être obtenus lorsque l'on fait tourner la roue.

### Partie A

L'organisateur demande au joueur de faire tourner la roue, puis d'extraire au hasard un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :
• si le secteur obtenu est blanc, alors il extrait un jeton du sac ;
• si le secteur obtenu est noir, alors il extrait successivement et avec remise deux jetons du sac.
Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On note A l'événement « obtenir le secteur blanc » et B l'événement « obtenir un tirage constitué de jetons portant un numéro impair ».




On cherche $P(\text{B})$.

On sait que A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\text{B}) = P(\text{A}\cap\text{B}) + P(\overline{\text{A}}\cap\text{B})$$

$$= P(\text{A})\times P(\text{B}/\text{A}) + P(\overline{\text{A}})\times P(\text{B}/\overline{\text{A}})$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{5} + \frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{5}\times\frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{25}$$

$$= 0,2 + 0,24$$

$$= 0,44$$

2°) Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un secteur blanc en lançant la roue ?
On donnera la valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

On doit calculer $P(\text{A}/\text{B})$ (probabilité conditionnelle de A sachant B).

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$$ (formule de définition d'une probabilité conditionnelle)

$$= \frac{P(\text{A}) \times P(\text{B}/\text{A})}{P(\text{B})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{5}}{0{,}44}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{0{,}44}$$

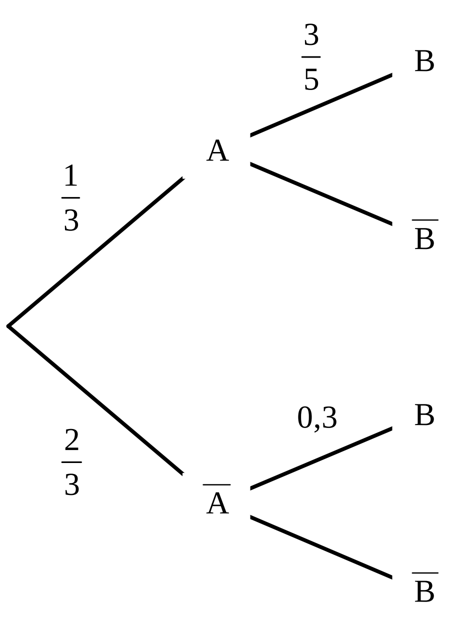
$$= \frac{1}{5 \times 0{,}44}$$

$$= \frac{5}{11}$$ (valeur exacte en fraction irréductible)

## Partie B

L'organisateur décide de modifier le jeu.
Le joueur fait tourner la roue, puis extrait au hasard un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :
• si le secteur obtenu est blanc, alors il extrait un jeton du sac ;
• si le secteur obtenu est noir, alors il extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.
Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.
On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.
1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On reprend les mêmes notations et on refait un nouvel arbre.



L'énoncé donne $P\left(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}\right)=0,3$ que l'on retrouve très facilement : $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=0,3$ (le tirage des jetons dans le sac s'effectue sans remise).

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)$$

$$=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B}/\mathrm{A})+P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times P\left(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{5}+\frac{2}{3}\times 0,3$$

$$=0,2+0,2$$

$$=0,4$$

2°) Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un secteur blanc en lançant la roue ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

$P(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$ (formule de définition d'une probabilité conditionnelle)

$$=\frac{P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B}/\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\cancel{3}}\times\dfrac{\cancel{3}}{5}}{0,4}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{5}}{0,4}$$

$$=\frac{0,2}{0,4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$=0,5$$

**V.**

Une entreprise emploie 500 personnes qui déjeunent à la cantine à l'un ou l'autre des deux services avec une probabilité égale de manger au premier ou au second service.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui déjeunent au premier service.

Compléter la phrase : X suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots\ldots\ldots$ et $p = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,5$.

Calculer la probabilité que le nombre de personnes déjeunant au premier service soit supérieur ou égal à 240.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Calculer la probabilité que le nombre de personnes déjeunant à chaque service soit inférieur ou égal à 270.
On donnera la valeur arrondie au millième.

L'épreuve « interroger une personne au hasard » est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à l'événement S :
« La personne mange au premier service » (succès) soit à son contraire $\overline{\text{S}}$ (échec).

D'après l'énoncé, la probabilité de S est $p = 0,5$.

On répète l'épreuve 500 fois dans des conditions identiques indépendantes.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui déjeunent à la cantine.

X suit la loi binomiale de paramètres 500 (nombre de répétitions) et 0,5 (probabilité qu'une personne déjeune à la cantine).

On utilise la calculatrice pour déterminer les différents résultats des probabilités demandées.

On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

On définit les événements :
A : « Le nombre de personnes déjeunant au premier service est supérieur ou égal à 240 » ;

B : « Le nombre de personnes déjeunant à chaque service est inférieur ou égal à 270 ».

Calcul de la probabilité de A :

$$\begin{aligned} P(\text{A}) &= P(\text{X} \geqslant 240) \\ &= 0,8261679\ldots \quad \text{(il s'agit d'un nombre décimal car } p \text{ est un nombre décimal)} \end{aligned}$$

Calcul de la probabilité de B :

On sait que 500 personnes et que X personnes déjeunent au premier service.
Le nombre de personnes qui déjeunent au second service est donc $500 - \text{X}$ (on suppose que personne ne déjeune aux deux services).

$$\begin{aligned} P(\text{B}) &= P\big((\text{X} \leqslant 270) \cap (500 - \text{X} \leqslant 270)\big) \\ &= P\big((\text{X} \leqslant 270) \cap (\text{X} \geqslant 230)\big) \\ &= P(230 \leqslant \text{X} \leqslant 270) \\ &= 0,933310\ldots \quad \text{(nombre décimal)} \end{aligned}$$

**VI.**

Déterminer le réel $x$ tel que les nombres $e^x$, $-1$, $e^{x+2}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Pour que les nombres $e^x$, $-1$, $e^{x+2}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que $\frac{-1}{e^x}=\frac{e^{x+2}}{-1}$ $(1)$.

1ère méthode :

On simplifie les deux quotients $\frac{-1}{e^x}$ et $\frac{e^{x+2}}{-1}$.

$\frac{-1}{e^x}=-\frac{1}{e^x}=-e^{-x}$ (évident)

$\frac{e^{x+2}}{-1}=-e^{x+2}$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -e^{-x}=-e^{x+2}\\ &\Leftrightarrow e^{-x}=e^{x+2}\\ &\Leftrightarrow -x=x+2\\ &\Leftrightarrow 2x=-2\\ &\Leftrightarrow x=-1\end{aligned}$$

2e méthode :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow e^{2x+2}=1 \quad \text{(produit en croix)}\\ &\Leftrightarrow 2x+2=0\\ &\Leftrightarrow x=-1\end{aligned}$$

3e méthode :

On introduit la raison $q$ de la suite.

Cette méthode est possible mais à éviter.

Compléments :

Pour $x=-1$, les nombres sont $-e^{-1}$, $-1$, $e^1=e$.

On vérifie aisément que dans cet ordre, ils sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-e$.

Comme les nombres $e^x$, $-1$, $e^{x+2}$ sont non nuls, on pourrait utiliser directement la propriété suivante :

Soit $a$, $b$, $c$ trois réels non nuls.

$a$, $b$, $c$ sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2=ac$.

On peut parler de progression géométrique.

---

**VII.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$.

1°) Démontrer que l'intervalle $I=[0\,;1]$ est stable par *f*, c'est-à-dire que pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$.

Le plus simple est de procéder par inégalités successives.

| |
|---|
| On ne procède pas par équivalences. |

Soit *x* un réel quelconque de *I*.

On procède par étapes pour reconstituer l'expression $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$.

On part de $0 \leqslant x \leqslant 1$ (*x* compris entre 0 et 1).

On va mettre au carré, ajouter 1 et diviser par 2. On décompose la fonction et on la reconstruit.

En élevant tous les membres au carré, on obtient alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ (conservation du sens des inégalités car tous les membres sont strictement positifs).

En ajoutant 1 à chaque membre, on obtient : $1 \leqslant x^2+1 \leqslant 2$.

En divisant les deux membres par 2, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x^2+1}{2} \leqslant 1$ (2 est strictement positif donc les sens ne changent pas).

On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

| |
|---|
| On peut aussi dire que $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. De plus, l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ est inclus dans l'intervalle $[0\,;1]$.<br>On en déduit que $f(x) \in [0\,;1]$. |

On en déduit que $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.
Donc l'intervalle *I* est stable par *f*.

| |
|---|
| Avec le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, en utilisant le sens de variation de *f*, on pourra démontrer plus tard que $f(I)=\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. |

Autre méthode :

On utilise le sens de variation de *f*.
On démontre aisément que *f* est croissante sur *I* en utilisant la propriété des variations d'une fonction polynôme du second degré (car *f* est une fonction polynôme du second degré) ou en utilisant la dérivée.
On ne peut par donner le sens de variation de *f* par simple observation de sa courbe représentative sur la calculatrice.

Il en résulte que $0 \leqslant x \leqslant 1$ entraîne $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ soit $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Or $0 \leqslant \frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2°) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où *a* est un réel quelconque de l'intervalle *I* et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel *n*.
On ne cherchera pas à exprimer $u_n$ en fonction de *n*.

● Expliquer pourquoi (sans calculs) tous les termes de la suite appartiennent à *I*.

On sait que $a \in I$ par hypothèse et que *I* est stable par *f* donc, d'après une propriété du cours, on peut affirmer que tous les termes de la suite appartiennent à *I*.

La démonstration de cette propriété est aisée au moyen d'un raisonnement de proche en proche, ou, mieux, d'un raisonnement par récurrence [$u_1 = f(u_0)$ soit $u_1 = f(a)$ ; or $a \in I$ par hypothèse et *I* est stable par *f* donc $u_1 \in I$ etc.].

● Déterminer le sens de variation de $(u_n)$.

On commence par utiliser la calculatrice pour avoir une idée du comportement de la suite :
- soit en utilisant la touche $\boxed{\text{Ans}}$ (formule $\left(\text{Ans}^2+1\right)/2$ ) ;
- soit en rentrant la suite dans la rubrique « Suites ».

On utilise la méthode par différence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \qquad \left(\text{on a } f(u_n) = \frac{{u_n}^2+1}{2}\right)$$

$$= \frac{{u_n}^2+1}{2} - u_n$$

$$= \frac{{u_n}^2+1-2u_n}{2}$$

$$= \frac{(u_n-1)^2}{2}$$

On doit étudier le signe de $\frac{(u_n-1)^2}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n-1)^2 \geqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$.

La dernière inégalité permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On en déduit que $(u_n)$ est croissante.

• En déduire que $(u_n)$ converge.

On reprend les différentes propriétés de la suite que l'on vient d'établir dans les deux questions précédentes.

On a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On peut donc dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 1$ et ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)$ est majorée par 1.

On a également démontré que la suite $(u_n)$ est croissante à partir de l'indice 0.

Or toute suite décroissante minorée converge (théorème du cours).

On en déduit que la suite $(u_n)$ converge.

On ne dit pas que la suite $(u_n)$ converge vers 1. Ce sera le but de la question suivante.
On peut juste dire que la suite $(u_n)$ converge.
On n'est pas en mesure de préciser la limite : la suite $(u_n)$ peut converger vers un réel inférieur ou égal à 1.

1 est $\boxed{\text{un}}$ majorant de la suite. Rien ne permet d'affirmer que c'est la limite.

• On note $\ell$ sa limite. Écrire une égalité vérifiée par $\ell$ puis déterminer la valeur de $\ell$.

On utilise la relation de récurrence $= \dfrac{u_n{}^2+1}{2}$ pour passer à la limite.

On sait que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

On va déterminer la limite de $u_{n+1}$ de deux manières différentes : en utilisant la propriété de décalage d'indice et en utilisant la relation de récurrence.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} =$

- $\ell$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ et les termes de la suite $(u_{n+1})$ sont les mêmes que ceux de la suite $(u_n)$ à l'exception du premier terme)

- $\dfrac{\ell^2+1}{2}$ (car $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n{}^2+1}{2}$ par la relation de récurrence ; opération algébrique sur les limites de suites)

Par unicité de la limite d'une suite (il ne peut y avoir qu'une seule limite), on a : $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2} \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2l = l^2 + 1$

$\Leftrightarrow l^2 - 2l + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (l-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow l - 1 = 0$

$\Leftrightarrow l = 1$

On peut donc dire $(u_n)$ converge vers 1.

3°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = 0,2$.
La fonction Python d'en-tête `def terme(n):` donnée dans le cadre ci-dessous prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et a pour objectif de renvoyer la valeur de $u_n$.

```
def terme(n):
    u=0.2
    for i in range(1,n+1):

        u=

    return u
```

Compléter l'instruction manquante (ligne `u=(u**2+1)/2`).