T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 6 janvier 2023

50 minutes

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Déterminer le réel x tel que les nombres 1, e^{2x}, $2e^{x}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

……... (une seule réponse sans égalité)

II. (13 points : 1°) 3 points + 3 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un cube. On note I le symétrique de D par rapport à C.

1°) On note P le plan contenant les points A, F, G, D.
On rappelle :

- que le quadrilatère AFGD est un rectangle ;
- que P est le plan médiateur du segment $[\mathrm{CH}]$ et, par conséquent, qu'il est orthogonal à la droite (CH) (autrement dit : $(\mathrm{CH}) \perp P$).

On admettra que les droites (CH) et (GI) sont parallèles (résultat facile à obtenir en démontrant par exemple que le quadrilatère CIGH est un parallélogramme).

Démontrer que $(\mathrm{GI}) \perp P$. Rédiger correctement après recherche au brouillon (une seule idée par ligne).

……..

……..

……..

En déduire que $(\mathrm{GI}) \perp (\mathrm{AG})$.

……..

……..

……..

2°) On note *a* la longueur des arêtes du cube ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
Exprimer les longueurs EG et GI en fonction de *a*.

……..……. (une seule égalité) ……..……. (une seule égalité)

On note Q le plan médiateur du segment $[\mathrm{EI}]$.
Expliquer pourquoi $\mathrm{G} \in Q$.

………..

………..

3°) Exprimer l'aire du triangle AGI en fonction de *a*.

………..

………..

4°) Quel est le projeté orthogonal du point B sur le plan *P* ? Quelle est la distance du point B au plan *P* ?

………..

………..

III. (2 points : 1 point + 1 point)

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AD}=3$, $\mathrm{AE}=2$.
Soit I un point quelconque de la droite (AB) distinct de A. On pose $\mathrm{AI}=x$.

● Exprimer en fonction de *x* le volume de la pyramide IADHE. ……..…….

● Exprimer en fonction de *x* le volume du tétraèdre AIFG. ……..…….

IV. (3 points : 2 points + 1 point)

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $\mathrm{A}(1\,;3)$, $\mathrm{B}(-3\,;1)$, $\mathrm{C}(4\,;0)$.
On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.
Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite (CI).

La droite (CI) coupe l'axe des ordonnées en un point J. Quelle est l'ordonnée de J ? ……

Indications données à l’oral

Faire attention aux notations (droites, segments, plans…).

On pourra utiliser des symboles mathématiques dans la rédaction à condition de les utiliser correctement et à bon escient.

La formule du volume d’un tétraèdre est la même que celle d’une pyramide car un tétraèdre est une pyramide particulière.

On ne dit pas qu’une droite fait partie d’un plan mais est incluse dans ce plan.

Corrigé de l'interrogation écrite du 6-1-2023

I.

Déterminer le réel x tel que les nombres 1, e^{2x}, $2e^{x}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\frac{\ln 2}{3} \quad \text{(une seule réponse sans égalité)}$$

Pour que les nombres 1, e^{2x}, $2e^{x}$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, il faut et il suffit que $\dfrac{e^{2x}}{1}=\dfrac{2e^{x}}{e^{2x}}$ (1).

1ère méthode :

On simplifie les deux quotients $\dfrac{e^{2x}}{1}$ et $\dfrac{2e^{x}}{e^{2x}}$.

$\dfrac{e^{2x}}{1}=e^{2x}$ (évident)

$\dfrac{2e^{x}}{e^{2x}}=2e^{x-2x}=2e^{-x}$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow e^{2x}=2e^{-x}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right)=\ln\left(2e^{-x}\right)\\
&\Leftrightarrow 2x=\ln 2+\ln\left(e^{-x}\right)\\
&\Leftrightarrow 2x=\ln 2-x\\
&\Leftrightarrow 3x=\ln 2\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{3}
\end{aligned}$$

2e méthode :

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow e^{2x}\times e^{2x}=1\times 2e^{x} \quad \text{(produit en croix)}\\
&\Leftrightarrow e^{4x}=1\times 2e^{x}\\
&\Leftrightarrow e^{4x}=2e^{x}\\
&\Leftrightarrow \frac{e^{4x}}{e^{x}}=2\\
&\Leftrightarrow e^{3x}=2\\
&\Leftrightarrow 3x=\ln 2\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{3}
\end{aligned}$$

Compléments :

Pour $x=\dfrac{\ln 2}{3}$, les nombres sont 1, $\mathrm{e}^{2\times\frac{\ln 2}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln 4}{3}}=\sqrt[3]{4}$, $2\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{3}}=2\sqrt[3]{2}$.

On vérifie aisément que dans cet ordre, ils sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt[3]{4}$.

Comme les nombres 1, e^{2x}, $2\mathrm{e}^{x}$ sont non nuls, on pourrait utiliser directement la propriété suivante :

Soit *a*, *b*, *c* trois réels non nuls.

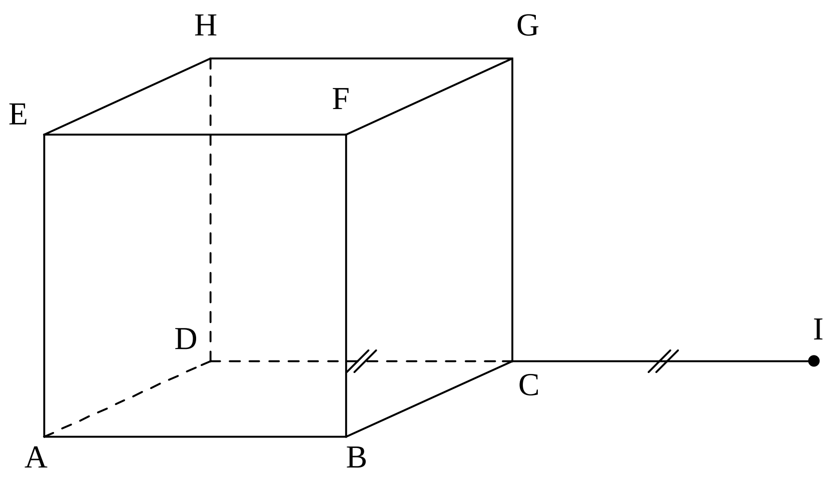
a, *b*, *c* sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2=ac$.

On peut parler de progression géométrique.

II.

Soit ABCDEFGH un cube. On note I le symétrique de D par rapport à C.

On commence par faire une figure en respectant la disposition habituelle des points (et pas n'importe comment comme je l'ai vu dans plein de brouillons par des élèves qui n'écoutent rien).
Si on ne respecte pas la disposition habituelle, on obtient une figure plus compliquée à appréhender pour le cerveau.



1°) On note *P* le plan contenant les points A, F, G, D.
On rappelle :
● que le quadrilatère AFGD est un rectangle ;
● que *P* est le plan médiateur du segment $[\mathrm{CH}]$ et, par conséquent, qu'il est orthogonal à la droite (CH) (autrement dit : $(\mathrm{CH})\perp P$).
On admettra que les droites (CH) et (GI) sont parallèles (résultat facile à obtenir en démontrant par exemple que le quadrilatère CIGH est un parallélogramme).

Démontrer que $(\mathrm{GI})\perp P$. Rédiger correctement après recherche au brouillon (une seule idée par ligne).

On peut éventuellement colorier le plan *P*.

On sait que $(\mathrm{CH}) \perp P$ et que $(\mathrm{CH}) \mathbin{//} (\mathrm{GI})$.

Or si deux droites de l'espace sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre (théorème du cours).

On en déduit que $(\mathrm{GI}) \perp P$.

En déduire que $(\mathrm{GI}) \perp (\mathrm{AG})$.

On a $(\mathrm{AG}) \subset P$ et on a démontré que $(\mathrm{GI}) \perp P$.

Or si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.

On en déduit que $(\mathrm{GI}) \perp (\mathrm{AG})$.

On peut noter que les droites (GI) et (AG) sont perpendiculaires car elles sont sécantes (en G).

2°) On note a la longueur des arêtes du cube ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
Exprimer les longueurs EG et GI en fonction de a.

$\mathrm{EG} = a\sqrt{2}$ (une seule égalité) $\qquad\qquad$ $\mathrm{GI} = a\sqrt{2}$ (une seule égalité)

Pour EG, on applique la formule donnant la longueur des diagonales d'un carré.

Pour GI, on applique le théorème de Pythagore dans le triangle CIG rectangle en C.

On note Q le plan médiateur du segment $[\mathrm{EI}]$.
Expliquer pourquoi $\mathrm{G} \in Q$.

D'après la question précédente, on a $\mathrm{GE} = \mathrm{GI} = a\sqrt{2}$.

Or si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient au plan médiateur de ce segment.

On en déduit que $\mathrm{G} \in Q$.

3°) Exprimer l'aire du triangle AGI en fonction de a.

Dans la question 1°), on a démontré $(\mathrm{GI}) \perp (\mathrm{AG})$ donc le triangle AGI est rectangle en G.

Pour calculer son aire, on utilise les longueurs des deux côtés de l'angle droit, c'est-à-dire les longueurs des segments $[\mathrm{GA}]$ et $[\mathrm{GI}]$.

$\mathrm{GI} = a\sqrt{2}$

$\mathrm{GA} = a\sqrt{3}$ (formule donnant la longueur des diagonales d'un cube)

$$\mathcal{A}_{\text{AGI}} = \frac{\text{GA}\times\text{GI}}{2}$$
$$= \frac{a\sqrt{3}\times a\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{a^2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$ (unité d’aire associée à l’unité de longueur considérée sous-entendue)

4°) Quel est le projeté orthogonal du point B sur le plan *P* ? Quelle est la distance du point B au plan *P* ?

Le projeté orthogonal du point B sur le plan *P* est le point O, centre de la face ABFE (assez facile à justifier).

La distance du point B au plan *P* est la distance BO.

$$\text{d}(B, P) = \text{BO}$$
$$= \frac{\text{BE}}{2}$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{a\cancel{\times\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$

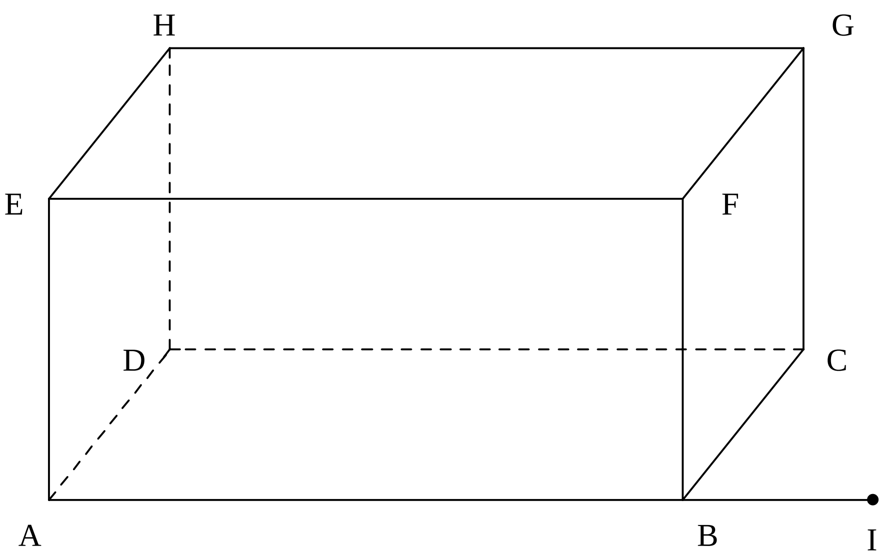
III.

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $\text{AB}=4$, $\text{AD}=3$, $\text{AE}=2$.
Soit I un point quelconque de la droite (AB) distinct de A. On pose $\text{AI}=x$.

● Exprimer en fonction de x le volume de la pyramide IADHE. $2x$

● Exprimer en fonction de x le volume du tétraèdre AIFG. x

On commence par faire une figure en respectant la disposition habituelle des points.



Pour la figure, on peut prendre I quelconque sur la demi-droite $[AB)$ mais n'appartenant pas au segment $[AB]$: $I \in [AB)$ mais $I \notin [AB]$.
Cela n'a cependant rien d'obligatoire.

● Soit V le volume de la pyramide IADHE (pyramide de sommet I et de base ADHE).

On peut faire apparaître cette pyramide sur la figure en respectant bien les pointillés pour les arêtes cachées.
La position de cette pyramide la rend peu commode à visualiser.

On applique la formule donnant le volume d'une pyramide en situation :

$$V = \frac{\mathcal{A}_{\text{ADHE}} \times \text{IA}}{3}$$

$$= \frac{\cancel{3} \times 2 \times x}{\cancel{3}} \quad \text{(ADHE est un rectangle)}$$

$$= 2x \quad \text{(unité de volume correspondant à l'unité de longueur choisie)}$$

● Soit V' le volume du tétraèdre AIFG.

On peut faire apparaître ce tétraèdre sur la figure en respectant bien les pointillés pour les arêtes cachées.
La position de ce tétraèdre le rend peu commode à visualiser.

On prend pour base le triangle AIF (seul choix possible pour faire le calcul). La hauteur issue du point G est donc la droite (FG).

On applique la formule donnant le volume d'une pyramide en situation :

$$V' = \frac{\mathcal{A}_{\text{AIF}} \times \text{FG}}{3}$$

On calcule à part l'aire du triangle AIF.

$$\mathcal{A}_{\text{AIF}} = \frac{\text{AI} \times \text{BF}}{2}$$

$$= \frac{x \times 2}{2}$$

$$= x \quad \text{(unité d'aire correspondant à l'unité de longueur choisie)}$$

$$V' = \frac{x \times \cancel{3}}{\cancel{3}}$$

$$= x \quad \text{(unité de volume correspondant à l'unité de longueur choisie)}$$

On constate que le volume de la pyramide est le double du volume du tétraèdre.

IV.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(1;3)$, $\mathrm{B}(-3;1)$, $\mathrm{C}(4;0)$.

On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

Écrire sans justifier un système d'équations paramétriques de la droite (CI).

On peut éventuellement faire un graphique.

On commence par calculer les coordonnées de I.

I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ donc $\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = -1 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} = 2 \end{array}\right.$ (formule des coordonnées d'un milieu)

$$\overrightarrow{\mathrm{CI}}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} - x_{\mathrm{C}} = -1 - 4 = -5 \\ y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{C}} = 2 - 0 = 2 \end{array}\right.$$

On peut donc prendre $\left(\mathrm{C}, \overrightarrow{\mathrm{CI}}\right)$ pour repère de (CI).

On peut appliquer directement le résultat du cours ou refaire toute la démarche.

Soit $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}} ; y_{\mathrm{A}})$ un point et $\vec{u}\,(\alpha ; \beta)$ un vecteur non nul. Un système d'équations paramétriques de la droite *D* passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit $\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + t\alpha \\ y = y_{\mathrm{A}} + t\beta \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Avec ce repère, la propriété fournit le système d'équations paramétriques suivant de (CI) : $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

$x_{\mathrm{J}} = 0$ donc le paramètre t du point J sur la droite (CI) vérifie l'égalité $4 - 5t = 0$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4 = 5t \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{J}} &= 2 \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

On peut vérifier ce résultat en résolvant le système $\begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 2t \\ x = 0 \end{cases}$ à l'aide de la calculatrice.

On peut aussi tracer la droite sur l'écran de la calculatrice grâce à son système d'équations paramétriques.