T exp

Interrogation écrite du jeudi 8 décembre 2022 (30 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………….…………………………………. **Note : ….. / 20**

I. (4 points : 2 points + 2 points)

● Écrire la liste des diviseurs positifs de 35. ……………………………………

● Les nombres 2022 et 35 sont-ils premiers entre eux ? Justifier par une phrase en rédigeant correctement.

…………………………………………………………………………………………………….………………….

…………………………………………………………………………………………………….………………….

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 9 soit égal à 8.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. ………………………………..

2°) Écrire à gauche l'égalité de la division euclidienne de n^2 par 9 en faisant apparaître le quotient est le reste.
3°) Écrire à droite l'égalité de la division euclidienne de $-n$ par 9 en faisant apparaître le quotient est le reste.

……………………………………………………… ………………………………..…………………

III. (5 points : 2 points + 3 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Compléter les phrases suivantes :

● Le quotient de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par n est égal à ……….. .

● Le reste de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par n est égal à ……….. .

Après recherche au brouillon, rédiger une démonstration de ces résultats sur les lignes ci-dessous.

…………………………………………………………………………………………………….………………….

…………………………………………………………………………………………………….………………….

…………………………………………………………………………………………………….………………….

…………………………………………………………………………………………………….………………….

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère les propositions suivantes :
A : « La somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours un multiple de 4 ».
B : « La somme du produit de deux entiers impairs consécutifs et de 1 est toujours un multiple de 4 ».

1°) Le but de cette question est de démontrer la proposition A.

On considère pour cela deux entiers impairs consécutifs a et b avec $a < b$. Il existe donc un entier relatif p tel que $a = 2p + 1$ et $b = 2p + 3$. Achever la démonstration.

……

……

……

……

2°) Reprendre la même démarche pour démontrer la proposition B.

……

……

……

……

……

V. (2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n}}{1 + \mathrm{i}z_n}$ pour tout entier naturel n.

On considère la fonction Python `ldt(n)` dans l'encadré ci-contre qui renvoie la liste de tous les termes de z_0 à z_n pour n entier naturel.

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `return`).

```
def ldt(n):
    z=1
    L=[z]
    for k in range …….. :
        z=z.conjugate()/(1+(1j)*z)
        L.append(z)
    return ….
```

Corrigé de l'interrogation écrite du 8-12-2022

I.

● Écrire la liste des diviseurs positifs de 35. 1, 5, 7, 35

● Les nombres 2022 et 35 sont-ils premiers entre eux ? Justifier par une phrase en rédigeant correctement.

2022 n'est divisible ni par 5, ni par 7, ni par 35 donc le seul diviseur positif commun à 35 et 2022 est 1.
On en déduit que 35 et 2022 sont premiers entre eux.

II.

Soit n un entier relatif tel que le reste de la division euclidienne de n par 9 soit égal à 8.
On note q le quotient de cette division euclidienne.

1°) Écrire ci-contre une égalité vérifiée par n et q. $n=9q+8$

2°) Écrire à gauche l'égalité de la division euclidienne de n^2 par 9 en faisant apparaître le quotient est le reste.
3°) Écrire à droite l'égalité de la division euclidienne de $-n$ par 9 en faisant apparaître le quotient est le reste.

$$n^2=9\times\left(9q^2+16q+7\right)+1 \qquad -n=9\times\left(-q-1\right)+1$$

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(9q+8\right)^2 \\ &= 81q^2+144q+64 \\ &= 9\times\left(9q^2+16q\right)+9\times7+1 \\ &= 9\times\left(9q^2+16q+7\right)+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -n &= -9q-8 \\ &= -9q-9+1 \\ &= 9\times\left(-q-1\right)+1 \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on doit faire un petit travail sur l'égalité pour faire apparaître un reste positif ou nul et strictement Inférieur au diviseur.

III.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Compléter les phrases suivantes :

● Le quotient de la division euclidienne de $\left(n+1\right)^2$ par n est égal à $n+2$.

● Le reste de la division euclidienne de $\left(n+1\right)^2$ par n est égal à 1.

On peut conjecturer ces deux résultats en utilisant la calculatrice.

Après recherche au brouillon, rédiger une démonstration de ces résultats sur les lignes ci-dessous.

On développe $(n+1)^2$ en utilisant une identité remarquable puis on effectue une factorisation partielle des deux premiers termes.

$$(n+1)^2 = n\underbrace{(n+2)}_{\text{quotient}} + \underbrace{1}_{\text{reste}}$$

reste car $n \geqslant 2$ par hypothèse ce qui est équivalent à $n > 1$

IV.

On considère les propositions suivantes :
A : « La somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours un multiple de 4 ».
B : « La somme du produit de deux entiers impairs consécutifs et de 1 est toujours un multiple de 4 ».

1°) Le but de cette question est de démontrer la proposition A.

On considère pour cela deux entiers impairs consécutifs *a* et *b* avec $a < b$. Il existe donc un entier relatif *p* tel que $a = 2p+1$ et $b = 2p+3$. Achever la démonstration.

$a+b = 2p+1+2p+3 = 4p+4 = 4(p+1)$
p est un entier relatif donc $p+1$ est un entier relatif.
On en déduit que $a+b$ est un multiple de 4.

2°) Reprendre la même démarche pour démontrer la proposition B.

$ab+1 = (2p+1)(2p+3)+1 = 4p^2+8p+4 = 4\left(p^2+2p+1\right) = 4(p+1)^2$
p est un entier relatif donc $p+1$ est un entier relatif. Par suite, $(p+1)^2$ est un entier naturel.
On en déduit que $ab+1$ est un multiple de 4.

On peut observer que $ab+1$ est un carré parfait.

V.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n}}{1+\mathrm{i}z_n}$ pour tout entier naturel *n*.

On considère la fonction Python `ldt(n)` dans l'encadré ci-contre qui renvoie la liste de tous les termes de z_0 à z_n pour *n* entier naturel.

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `return`).

```
def ldt(n):
    z=1
    L=[z]
    for k in range(1,n+1):
        z=z.conjugate()/(1+(1j)*z)
        L.append(z)
    return L
```