T
exp

Interrogation écrite du jeudi 1er décembre 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $E = [\![1\,;n]\!]$.

On note A et B les matrices carrées d'ordre n définies par leurs coefficients $a_{i,\,j}$ et $b_{i,\,j}$ pour $(i\,;\,j) \in E^2$ de la manière suivante : $a_{i,\,j} = |\, i - j \,|$; $b_{i,\,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ divise } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1°) Que valent les coefficients $a_{i,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? ….

Comparer $a_{i,\,j}$ et $a_{j,\,i}$ pour $(i\,;\,j) \in E^2$ quelconque. Que peut-on dire de la matrice A ?

……

……

2°) Que valent les coefficients $b_{i,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? ….

Que valent les coefficients $b_{1,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? ….

Que valent les coefficients $b_{i,\,j}$ pour $(i\,;\,j) \in E^2$ tel que $i > j$ quelconque ? Que peut-on dire de la matrice B ?

……

……

II. (2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}z_n}{z_n + 3}$ pour tout entier naturel n.

On considère la fonction Python d'en-tête `ldt(n)` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel n et qui renvoie tous les termes de z_0 à z_n.

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `print`).

```
def ldt(n):
    z=1+1j
    print(z)
    for k in range ........ :
        z=(1j)*z/(z+3)
        print ....
```

III. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

1°) Donner trois entiers naturels x strictement supérieurs à 3 tels que $x+3$ et $x-3$ soient des nombres premiers.

……………………

2°) Démontrer que pour tout entier relatif x la différence des carrés de $x+3$ et $x-3$ est un multiple de 12.

………

………

IV. (2 points)

Écrire en extension l'ensemble A des multiples de 3 compris entre – 5 et 10. ……………..……………………….

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On note E l'ensemble des multiples de 4, F l'ensemble des multiples de – 4, G l'ensemble des multiples de 8.

Que peut-on dire des ensembles E et F ? Répondre sans justifier. …………………

Peut-on écrire une relation d'inclusion entre les ensembles E et G ? Si oui, préciser laquelle et la démontrer.

………

………

………

VI. (1 point)

Dans cet exercice, on appelle *poids* d'un entier naturel n la somme des chiffres de son écriture en base dix.

Peut-on trouver un entier naturel ne s'écrivant en base dix qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200 ? ……

VII. (2 points)

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant 30 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 30. Le joueur doit tirer au hasard une boule de l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée est un diviseur ou un multiple de 6.

Quelle est la probabilité de gagner ? …….

Quelle est la probabilité de gagner sachant que le numéro de la boule tirée est strictement supérieur à 20 ? …….

Corrigé de l'interrogation écrite du 1-12-2022

I.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $E = [\![1 ; n]\!]$.

On note A et B les matrices carrées d'ordre n définies par leurs coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ pour $(i ; j) \in E^2$ de la manière suivante : $a_{i,j} = | i - j |$; $b_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ divise } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1°) Que valent les coefficients $a_{i,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? 0

Comparer $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ pour $(i ; j) \in E^2$ quelconque. Que peut-on dire de la matrice A ?

$$\forall (i ; j) \in E^2 \quad a_{j,i} = | j - i | = | i - j | = a_{i,j}$$

On a ${}^t\text{A} = \text{A}$, autrement dit la matrice A est symétrique (elle est égale à sa transposée).

2°) Que valent les coefficients $b_{i,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? 1

Que valent les coefficients $b_{1,i}$ pour $i \in E$ quelconque ? 1

Que valent les coefficients $b_{i,j}$ pour $(i ; j) \in E^2$ tel que $i > j$ quelconque ? Que peut-on dire de la matrice B ?

$\forall i \in E \quad b_{i,i} = 1$ car i divise i

$\forall i \in E \quad b_{1,i} = 1$ car 1 divise i

Si $(i ; j) \in E^2$ avec $i > j$ quelconque, $b_{i,j} = 0$.

Tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls donc la matrice B est triangulaire inférieure.

Pour $n = 2$, on a : $\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice carrée d'ordre 2).

II.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i} z_n}{z_n + 3}$ pour tout entier naturel n.

On considère la fonction Python d'en-tête `ldt(n)` dans l'encadré ci-dessous qui prend pour argument un entier naturel n et qui renvoie tous les termes de z_0 à z_n.

Compléter les deux instructions manquantes (pointillés au niveau du `for` et du `print`).

```
def ldt(n):
    z=1+1j
    print(z)
    for k in range(1,n+1):
        z=(1j)*z/(z+3)
        print(z)
```

`ldt` : abréviation de « liste des termes »

III.

1°) Donner trois entiers naturels *x* strictement supérieurs à 3 tels que $x+3$ et $x-3$ soient des nombres premiers.

8 10 14 16

Attention, 4 ne convient pas car $4-3=1$ et 1 n'est pas un nombre premier.

2°) Démontrer que pour tout entier relatif *x* la différence des carrés de $x+3$ et $x-3$ est un multiple de 12.

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad (x+3)^2-(x-3)^2=\left(x^2+6x+9\right)-\left(x^2-6x+9\right)$$

$$=12x$$

Comme *x* est entier relatif, on en déduit que 12*x* est un multiple de 12

On en déduit que pour tout entier relatif *x* la différence des carrés de $x+3$ et $x-3$ est un multiple de 12.

IV.

Écrire en extension l'ensemble *A* des multiples de 3 compris entre – 5 et 10. $A=\{-3, 0, 3, 6\}$

V.

On note *E* l'ensemble des multiples de 4, *F* l'ensemble des multiples de – 4, *G* l'ensemble des multiples de 8.

Que peut-on dire des ensembles *E* et *F* ? Répondre sans justifier. $E=F$

Pour tout entier relatif *a*, on a $\mathcal{M}(-a)=\mathcal{M}(a)$ (notations du cours : $\mathcal{M}(a)$ désigne l'ensemble des multiples de *a* ; $\mathcal{M}(-a)$ désigne l'ensemble des multiples de – *a*).

Peut-on écrire une relation d'inclusion entre les ensembles *E* et *G* ? Si oui, préciser laquelle et la démontrer.

On a $G \subset E$.
Cette inclusion traduit la propriété : « Tout multiple de 8 est un multiple de 4 ».

Pour démontrer que *G* est inclus dans *E*, on doit démontrer que tout élément de *G* appartient à *E*.

Soit *x* un élément quelconque de *G*.

Par définition de *G*, il existe un entier relatif *k* tel que $x=8k$.

On peut écrire $x=4\times 2k$.
Or comme *k* est un entier relatif, $k'=2k$ est aussi un entier relatif.

L'égalité $x=4k'$ permet donc d'affirmer que $x \in E$.

On retiendra cette méthode qui est toujours la même pour démontrer qu'un ensemble est inclus dans un autre.

VI.

Dans cet exercice, on appelle *poids* d'un entier naturel n la somme des chiffres de son écriture en base dix.

Peut-on trouver un entier naturel ne s'écrivant en base dix qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200 ? non

Supposons qu'il existe un entier naturel N vérifiant les deux conditions :
- l'écriture en base dix de N ne comporte que des 3 et des 6 ;
- le poids de N est égal à 200.

Soit x le nombre de 3 et y le nombre de 6.

Le poids de N est égal à $3x+6y$.

On devrait avoir $3x+6y=200$.

Or :
- la somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 6 est un multiple de 3 ;
- 200 n'est pas un multiple de 3.

On en déduit donc une impossibilité.
La réponse à la question est donc non.

VII.

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant 30 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 30. Le joueur doit tirer au hasard une boule de l'urne. Il gagne si le numéro de la boule tirée est un diviseur ou un multiple de 6.

Quelle est la probabilité de gagner ? $\frac{4}{15}$

On est dans une situation d'équiprobabilité.
Les boules qui permettent de gagner sont celles qui portent les numéros 1, 2, 3, 6, 12, 18, 24, 30.
Il y a donc 8 boules qui permettent de gagner.
Par conséquent, la probabilité de gagner est égale à $\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$.

Quelle est la probabilité de gagner sachant que le numéro de la boule tirée est strictement supérieur à 20 ? $\frac{1}{5}$

Il y a 10 boules dont le numéro est strictement supérieur à 20 parmi lesquelles 4 permettent de gagner.
La probabilité conditionnelle de gagner sachant que le numéro de la boule tirée est supérieur à 20 est égale à $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.