T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 25 novembre 2022

Groupe A
30 minutes
1 point pour le soin

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Écrire le meilleur encadrement possible de e^x pour $x \in]-\infty ; 0]$. ………………….

II. (2 points)

Soit x un réel quelconque.
Exprimer sous la forme la plus simple possible la moyenne géométrique de e^{x+1} et de e^{x-3}.

………. (un seul résultat sans égalité)

III. (2 points)

On considère l'équation $(\ln x)^2 = a \quad (\mathrm{E})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où a est un paramètre réel.
On note S l'ensemble des solutions de (E).

Compléter en distinguant plusieurs cas suivant les valeurs de a :

- Si ………, alors $S =$ ....
- Si ………, alors $S =$ ....
- Si ………, alors $S =$ ....

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \times n!$ pour tout entier naturel n.
1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0 =$ ...... (un seul résultat) $u_1 =$ ...... (un seul résultat) $u_2 =$ ...... (un seul résultat)

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} + u_n = (-1)^{n+1} n \times n!$.

V. (2 points)

On considère la suite (u_n) géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{2}{3}$.

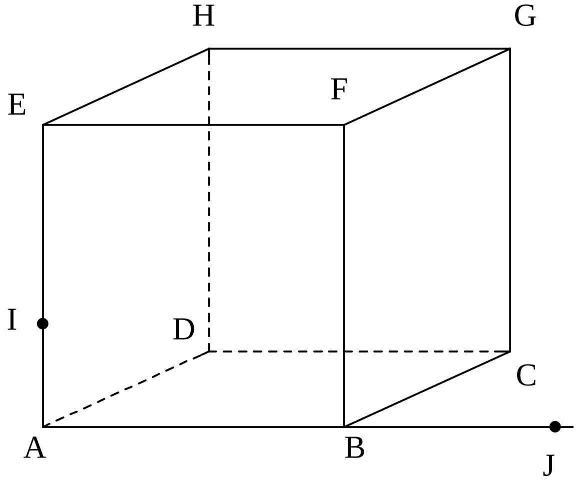
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

………………………………………………………

VI. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

On considère un cube ABCDEFGH. Soit I un point quelconque du segment $[\text{AE}]$, distinct de A et de E, et J un point quelconque de la demi-droite $[\text{AB})$ n'appartenant pas au segment $[\text{AB}]$.



1°) Parmi les droites suivantes, indiquer en les entourant celles qui sont sécantes avec la droite (GI) :

(AB) (AD) (AC)

2°) On note Δ la droite parallèle à la droite (BI) passant par C.

Répondre par oui ou non.

Les droites (BI) et (CJ) sont-elles sécantes ? …….

Les droites (FI) et (EJ) sont-elles sécantes ? …….

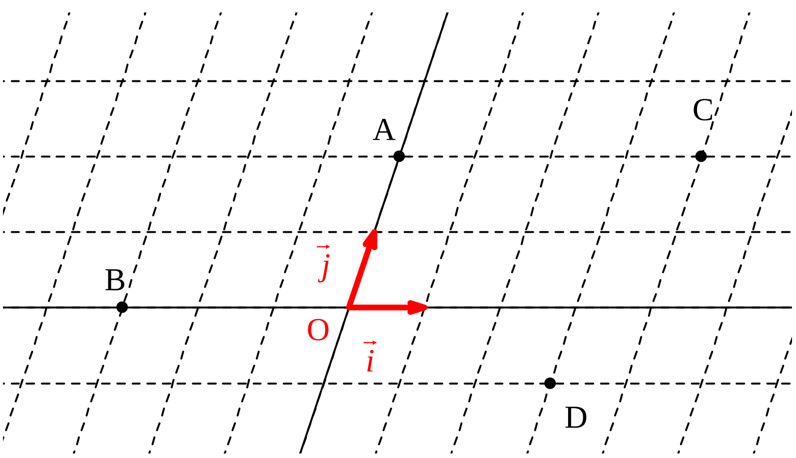
Les droites Δ et (DH) sont-elles sécantes ? …….

La droite (GI) est-elle sécante au plan (BDH) ? …….

VII. (2 points : 1 point par système)

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on a placé quatre points A, B, C, D dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Donner sans justifier un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

On répondra à droite du graphique.



Corrigé de l'interrogation écrite du 25-11-2022

I.

Écrire le meilleur encadrement possible de e^x pour $x \in]-\infty\,;0]$. $0 < \mathrm{e}^x \leqslant 1$

On utilise le tableau de variations de la fonction exponentielle avec les limites.
Attention à l'inégalité stricte à gauche.

II.

Soit x un réel quelconque.
Exprimer sous la forme la plus simple possible la moyenne géométrique de e^{x+1} et de e^{x-3}.

e^{x-1} (un seul résultat sans égalité)

Soit m la moyenne géométrique de e^{x+1} et de e^{x-3}.

$$m = \sqrt{\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{x-3}}$$

$$= \sqrt{\mathrm{e}^{2x-2}}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{2x-2}{2}}$$

$$= \mathrm{e}^{x-1}$$

On pourrait écrire $\sqrt{\mathrm{e}^{2x-2}} = \left(\mathrm{e}^{2x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

III.

On considère l'équation $(\ln x)^2 = a \quad (\mathrm{E})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où a est un paramètre réel.
On note S l'ensemble des solutions de (E).

Compléter en distinguant plusieurs cas suivant les valeurs de a :

- Si $a > 0$, alors $S = \left\{\mathrm{e}^{\sqrt{a}}\,;\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}\right\}$
- Si $a = 0$, alors $S = \{1\}$
- Si $a < 0$, alors $S = \varnothing$

On doit avoir $x > 0$.
L'ensemble de résolution est $\mathbb{R}_+^*$.

On discute suivant le signe du paramètre a.

1[er] cas : $a>0$

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \ln x=\sqrt{a} \text{ ou } \ln x=-\sqrt{a}\\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\sqrt{a}} \text{ ou } x=\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}\end{aligned}$$

On peut retenir $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$ et $\mathrm{e}^{-\sqrt{a}}$ car ce sont des réels strictement positifs.

2[e] cas : $a=0$

(E) s'écrit alors $(\ln x)^2=0$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \ln x=0\\ &\Leftrightarrow x=1\end{aligned}$$

On peut retenir 1 comme solution car 1 est strictement positif.

3[e] cas : $a<0$

(E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$ car un carré est toujours positif ou nul.

On a effectué une discussion.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n=(-1)^n\times n!$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0=1$ (un seul résultat) $u_1=-1$ (un seul résultat) $u_2=2$ (un seul résultat)

On vérifie les trois résultats grâce à la calculatrice.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a $u_{n+1}+u_n=(-1)^{n+1}n\times n!$.

L'écriture $n\times n!$ doit être comprise comme $n\times(n!)$.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}+u_n&=(-1)^{n+1}(n+1)!+(-1)^n n!\\&=(-1)^n\times(-1)\times(n+1)\times n!+(-1)^n n!\\&=(-1)^n n!\times\left[-(n+1)+1\right]\\&=(-1)^n n!\times(-n)\\&=(-1)^n n!\times(-1)\times n\\&=(-1)^{n+1}n!\times n\end{aligned}$$

On utilise la relation fondamentale $\forall n\in\mathbb{N}\quad (n+1)!=n!\times(n+1)$.

Cette formule permettrait de définir la factorielle d'un entier à l'aide d'une suite.

V.

On considère la suite (u_n) géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1=5$ et de raison $q=-\dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad S_n=3\times\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

On applique la formule donnant la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique :

1^{er} terme $\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{(la somme comprend } n \text{ termes)}$$

$$= 5 \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}$$

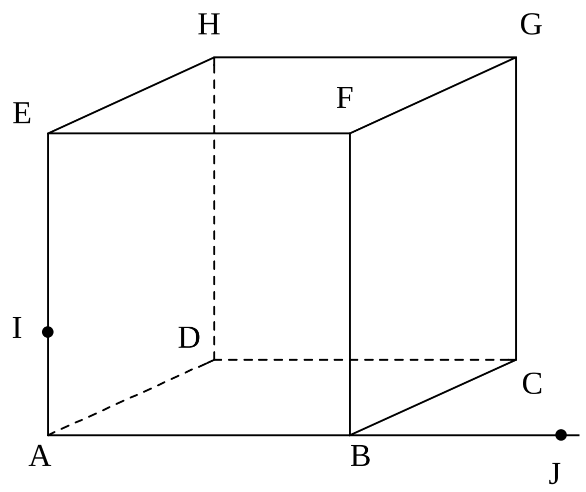
$$= 5 \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{5}{3}}$$

$$= 3 \times \left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

On teste la formule pour $n=1$ (calcul mental rapide).

VI.

On considère un cube ABCDEFGH. Soit I un point quelconque du segment $[AE]$, distinct de A et de E, et J un point quelconque de la demi-droite $[AB)$ n'appartenant pas au segment $[AB]$.



1°) Parmi les droites suivantes, indiquer en les entourant celles qui sont sécantes avec la droite (GI) :

(AB) $\qquad$ (AD) $\qquad$ (AC)

2°) On note Δ la droite parallèle à la droite (BI) passant par C. Répondre par oui ou non.

Les droites (BI) et (CJ) sont-elles sécantes ? non

Les droites (FI) et (EJ) sont-elles sécantes ? oui

Les droites Δ et (DH) sont-elles sécantes ? oui

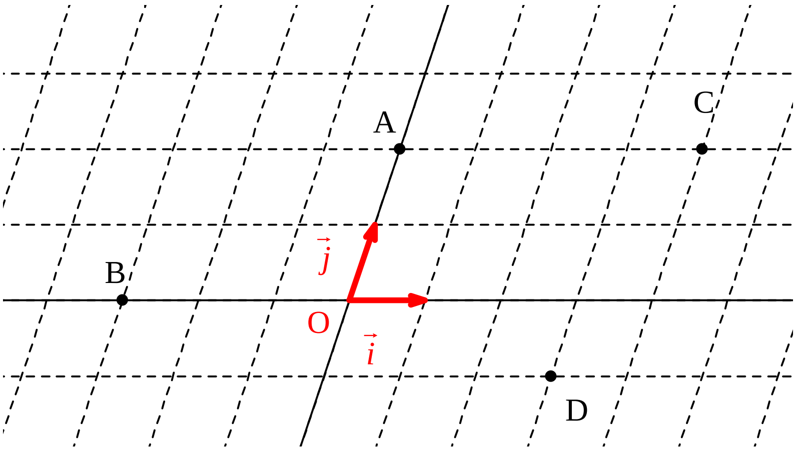
La droite (GI) est-elle sécante au plan (BDH) ? oui

1°) Justification :

Les droites (GI) et (AC) sont coplanaires sécantes. Elles sont toutes les deux contenues dans le plan (ACG).

VII.

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on a placé quatre points A, B, C, D dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner sans justifier un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).
On répondra à droite du graphique.



(AB) $\begin{cases} x = 0 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ (AB) $\begin{cases} x = -3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ (CD) $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 25 novembre 2022

Groupe B
30 minutes
1 point pour le soin

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Écrire le meilleur encadrement possible de e^{-x} pour $x \in \left]-\infty\,;0\right]$. …………………

II. (2 points)

Soit *x* un réel quelconque.
Exprimer sous la forme la plus simple possible la moyenne géométrique de e^{3x} et de e^{x-2}.

……… (un seul résultat sans égalité)

III. (2 points)

On considère l'équation $(\ln x)^2 = a$ $\quad(\mathrm{E})$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où *a* est un paramètre réel.
On note *S* l'ensemble des solutions de (E).

Compléter en distinguant plusieurs cas suivant les valeurs de *a* :

- Si ………, alors $S =$ ....
- Si ………, alors $S =$ ....
- Si ………, alors $S =$ ....

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $u_n = (-1)^n \times n!$ pour tout entier naturel *n*.
1°) Calculer u_0, u_1, u_2. On effectuera les résultats au brouillon.

$u_0 =$ …… (un seul résultat) $\quad u_1 =$ …… (un seul résultat) $\quad u_2 =$ …… (un seul résultat)

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a $u_{n+1} + u_n = (-1)^{n+1}\, n \times n!$.

V. (2 points)

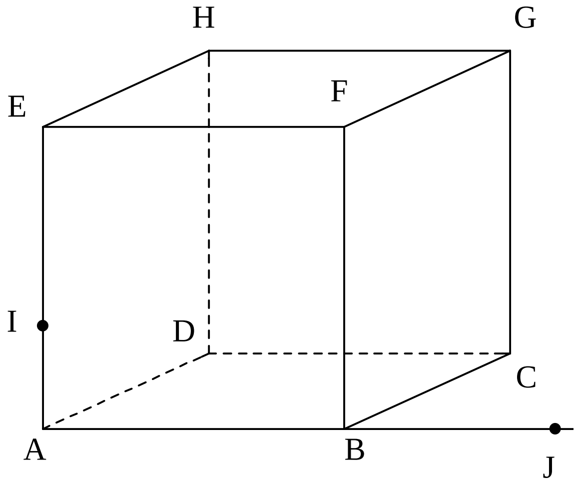
On considère la suite $\left(u_n\right)$ géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $q = -\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

……………………………………………………

VI. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

On considère un cube ABCDEFGH. Soit I un point quelconque du segment $[\mathrm{AE}]$, distinct de A et de E, et J un point quelconque de la demi-droite $[\mathrm{AB})$ n'appartenant pas au segment $[\mathrm{AB}]$.



1°) Parmi les droites suivantes, indiquer en les entourant celles qui sont sécantes avec la droite (GI) :

(AB) (AD) (AC)

2°) On note Δ la droite parallèle à la droite (BI) passant par C.
Répondre par oui ou non.

Les droites (BI) et (CJ) sont-elles sécantes ? …….

Les droites (FI) et (EJ) sont-elles sécantes ? …….

Les droites Δ et (DH) sont-elles sécantes ? …….

La droite (GI) est-elle sécante au plan (BDH) ? …….

VII. (2 points : 1 point par système)

On considère le graphique ci-dessous sur lequel on a placé quatre points A, B, C, D dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Donner sans justifier un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AD) et (BC).
On répondra à droite du graphique.