T exp

Interrogation écrite du jeudi 17 novembre 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points)

On note E l'ensemble des carrés parfaits et F l'ensemble des cubes parfaits.
Donner trois entiers naturels appartenant à $E \cap F$.

………………………….. (nombres séparés par des virgules)

II. (3 points)

Soit ABCD un rectangle du plan dont l'aire est de 100 cm^2 et dont le format est supérieur ou égal à 6.
Déterminer toutes les dimensions possibles de ABCD en cm sachant que ce sont des entiers naturels.
On donnera les résultats sous la forme de couples $(\text{longueur}\ ;\ \text{largeur})$.

…………………………………………

III. (3 points)

Résoudre l'équation $\left(\overline{z}\right)^2 = \text{i}\overline{z}$ $\quad(1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On attend une résolution directe sans poser $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.

………

………

………

………

………

………

………

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0 = u$ où u est un nombre complexe fixé et par la relation de récurrence $z_{n+1} = {z_n}^2 + 4$ pour tout entier naturel n.

1°) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) u tel(s) que $z_1 = 1$. ……………….. (répondre sans égalités)

2°) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) u tel(s) que $z_2 = 13$. ……………….. (répondre sans égalités)

3°) Dans cette question, on prend $u = 1 + \text{i}$.
On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de z_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

```
def terme(n):
    z=1+1j
    for k in range(1,n+1):

        z=…………

    return z
```

Compléter l'instruction manquante (ligne `z=`…………).

V. (5 points : 1°) 3 points avec 1 point pour le résultat + 2 points pour la démarche et la présentation des calculs ; 2°) 2 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe $1 - 2\text{i}$.

1°) Calculer l'affixe du point B de P tel que $\overrightarrow{\text{AB}} = \vec{u} - 2\vec{v}$ (1). Vérifier sur un graphique au brouillon.
2°) Calculer l'affixe du milieu I de $[\text{AB}]$.
Pour les deux questions, on répondra en effectuant des calculs avec les affixes, sans repasser par les coordonnées, et en faisant attention aux notations.

……

……

……

……

……

……

Corrigé de l'interrogation écrite du 17-11-2022

I.

On note E l'ensemble des carrés parfaits et F l'ensemble des cubes parfaits.
Donner trois entiers naturels appartenant à $E \bigcap F$.

0 ; 1 ; 64 (nombres séparés par des virgules)

En effet, $0=0^2=0^3$, $1=1^2=1^3$, $64=8^2=4^3$.

On a donné les trois plus petits éléments de $E \bigcap F$.

On peut aussi donner les résultats 729, 4096…

Il suffit de prendre des entiers naturels à la puissance 6.

II.

Soit ABCD un rectangle du plan dont l'aire est de 100 cm^2 et dont le format est supérieur ou égal à 6.
Déterminer toutes les dimensions possibles de ABCD en cm sachant que ce sont des entiers naturels.
On donnera les résultats sous la forme de couples $(\text{longueur} ; \text{largeur})$.

$$(100\,;1)\ ;\ (50\,;2)\ ;\ (25\,;4)$$

On peut faire une figure.

Le format d'un rectangle de longueur L et de largeur $\mathfrak{l}$ est le quotient $r=\dfrac{\text{L}}{\mathfrak{l}}$.

On cherche tous les couples $(\text{L}\,;\mathfrak{l})$ d'entiers naturels tels que $\text{L}\times\mathfrak{l}=100$ et $\dfrac{\text{L}}{\mathfrak{l}}\geqslant 6$.

On a $\dfrac{100}{1}\geqslant 6$, $\dfrac{50}{2}\geqslant 6$, $\dfrac{25}{4}\geqslant 6$.

III.

Résoudre l'équation $\left(\overline{z}\right)^2=\mathrm{i}\,\overline{z}$ $\quad(1)$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
On attend une résolution directe sans poser $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z}^2 = \mathrm{i}\overline{z}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \overline{z}^2 - \mathrm{i}\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z}\left(\overline{z} - \mathrm{i}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = 0$ ou $\overline{z} - \mathrm{i} = 0$ (équation produit-nul)

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $\overline{z} = \mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -\mathrm{i}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

On a $S = \{0\,;-\mathrm{i}\}$.

On peut aussi prendre tout de suite le conjugué des deux membres de (1).

On obtient $z^2 = \mathrm{i}z$ puis on résout normalement.

IV.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0 = u$ où u est un nombre complexe fixé et par la relation de récurrence $z_{n+1} = {z_n}^2 + 4$ pour tout entier naturel n.

1°) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) u tel(s) que $z_1 = 1$. $\mathrm{i}\sqrt{3}$; $-\mathrm{i}\sqrt{3}$ (répondre sans égalités)

On a $z_1 = u^2 + 4$.

On cherche les nombres complexes u tels que $z_1 = 1$ soit $u^2 + 4 = 1$ (1).

$(1) \Leftrightarrow u^2 = -3$

$\Leftrightarrow u = \mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $u = -\mathrm{i}\sqrt{3}$

On se réfère à la résolution des équations du type $z^2 = a$ où a est un réel.

2°) Déterminer le(s) nombre(s) complexe(s) u tel(s) que $z_2 = 13$. i ; $-\mathrm{i}$; $\mathrm{i}\sqrt{7}$; $-\mathrm{i}\sqrt{3}$ (répondre sans égalités)

On cherche les nombres complexes u tels que $z_2 = 13$ (1).

On a $z_2 = {z_1}^2 + 4 = \left(u^2 + 4\right)^2 + 4$.

On cherche donc les nombres complexes u tels que $\left(u^2 + 4\right)^2 + 4 = 13$ (2).

$(2) \Leftrightarrow \left(u^2+4\right)^2=9$

$\Leftrightarrow u^2+4=3$ ou $u^2+4=-3$

$\Leftrightarrow u^2=-1$ ou $u^2=-7$

$\Leftrightarrow u=\mathrm{i}$ ou $u=-\mathrm{i}$ ou $u=\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $u=-\mathrm{i}\sqrt{3}$

On peut aussi procéder en deux étapes, en remontant.
On cherche d'abord les valeurs de z_1 possibles. On en déduit les valeurs de u possibles.

3°) Dans cette question, on prend $u=1+\mathrm{i}$.
On considère la fonction Python `terme(n)` dans l'encadré ci-dessous qui renvoie la valeur de z_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

```
def terme(n):
    z=1+1j
    for k in range(1,n+1):
        z=z**2+4
    return z
```

Compléter l'instruction manquante (ligne `z=`…………).

On peut écrire l'instruction manquante sous la forme `z=z*z+4` ou `z=z**2+4`.

La variable de boucle est notée k et pas i pour ne pas engendrer de confusion avec i des nombres complexes.

On ne peut pas aller très loin dans le calcul des termes à cause du dépassement de capacité.

À partir du terme d'indice 2, la calculatrice donne des résultats avec des décimales erronées.

Pour terme(2), on obtient l'affichage : (16,00000000000001+16, 00000000000001j)

Pour terme(3), on obtient l'affichage : (4, 000000000000145+145, 0000000000005j)

V.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe $1-2\mathrm{i}$.

1°) Calculer l'affixe du point B de P tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}-2\vec{v}$ (1). Vérifier sur un graphique au brouillon.
2°) Calculer l'affixe du milieu I de $[\mathrm{AB}]$.
Pour les deux questions, on répondra en effectuant des calculs avec les affixes, sans repasser par les coordonnées, et en faisant attention aux notations.

1°)

Le vecteur $\vec{u}-2\vec{v}$ a pour affixe $1-2\mathrm{i}$.

$$(1) \Leftrightarrow z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}=1-2\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z_{\mathrm{B}}=1-2\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z_{\mathrm{B}}=2-4\mathrm{i}$$

On peut vérifier le résultat sur un graphique en effectuant la construction vectorielle.

On trace un représentant du vecteur $\vec{u}-2\vec{v}$ d'origine A, ce qui permet d'obtenir le point B et de lire ses coordonnées.

2°)

On utilise directement la formule donnant l'affixe du milieu d'un segment.

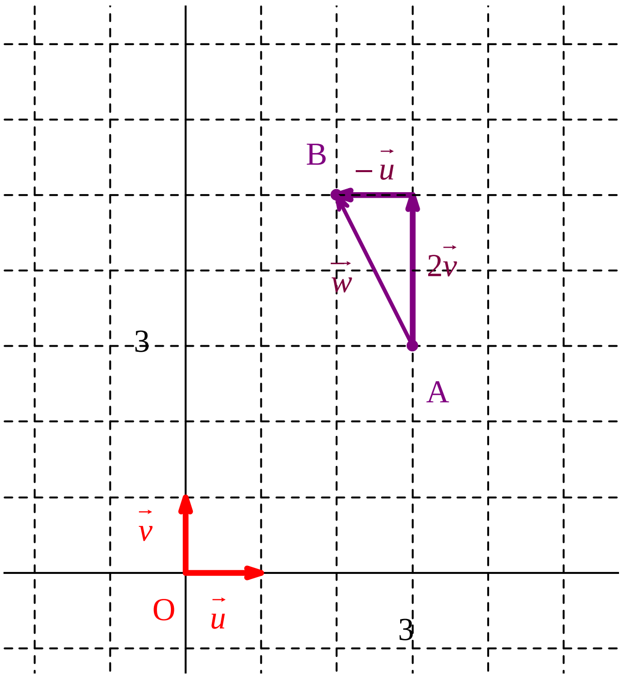
$$z_{\mathrm{I}}=\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{i}+2-4\mathrm{i}}{2}$$

$$=\frac{3-6\mathrm{i}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-3\mathrm{i}$$

On vérifie sur un graphique.



On peut aussi tracer un représentant de $\vec{w}$ d'origine O (origine du repère).