T exp

Interrogation écrite du jeudi 13 octobre 2022 (40 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

On pose $E=\{0\,;-1\}$ et $F=\{0\,;1\}$.

Écrire en extension l'ensemble $E\times F$ sur la ligne ci-dessous.

$E\times F=$ ………………………………………………………

II. (2 points)

Soit a et b deux entiers relatifs fixés tels que $a\leqslant b$. On pose $E=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

On rappelle que E peut aussi être noté $[\![a\,;b]\!]$.

Sur la ligne ci-dessous, écrire l'ensemble $A=\{x+y,(x\,;y)\in E^2\}$ sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets et exprimer le cardinal de A en fonction de a et b.

………………..… ……………

III. (2 points)

On considère l'ensemble $E=\{-1\,;0\,;1\}$ et on pose $F=E^2$.

- Compléter l'égalité : $\text{card}\,F=$ ……
- Écrire en extension le sous-ensemble G de F constitué des couples $(x\,;y)$ d'éléments de E tels que $xy>0$.

$G=$ ………………………………………………………

IV. (2 points)

On pose $x=\dfrac{89}{270}$.

Quel est le 2022[e] chiffre après la virgule dans le développement décimal propre de x ? ……

V. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On considère l'ensemble $E=\{-\mathrm{i}\,;1\,;\mathrm{i}\}$ et on pose $F=E^2$.

• Écrire en extension l'ensemble *F*.

$F=$ ....

• Écrire en extension le sous-ensemble *G* de *F* constitué des couples $(x\,;\,y)$ d'éléments de *E* tels que *xy* soit un réel strictement positif.

$G=$ ....

• La proposition *P* : « $\forall x\in E \quad \dfrac{1}{x}\in E$ » est-elle vraie ou fausse ? ....

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

Dans cet exercice, les deux équations ont pour inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Compléter les phrases suivantes :

• La solution de l'équation $\mathrm{i}\bar{z}=\mathrm{i}-2$ est ....

• Les solutions de l'équation $z^2=-1$ sont ....

VII. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

À tout nombre complexe *z* on associe le nombre complexe $Z=2z+\mathrm{i}\bar{z}$. On rédigera les réponses sur les lignes.
1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où *x* et *y* sont des réels.
Exprimer *Z* en fonction de *x* et de *y*. On donnera le résultat sous forme algébrique.
2°) Déterminer le nombre complexe *z* tel que $Z=5-2\mathrm{i}$.

....

....

....

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 13-10-2022

I.

On pose $E=\{0\,;-1\}$ et $F=\{0\,;1\}$.
Écrire en extension l'ensemble $E\times F$ sur la ligne ci-dessous.

$$E\times F=\{(0\,;0),(0\,;1),(-1\,;0),(-1\,;1)\}$$

Il s'agit du produit cartésien de l'ensemble *E* par l'ensemble *F* (dans cet ordre).

II.

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs fixés tels que $a\leqslant b$. On pose $E=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,a\leqslant x\leqslant b\}$.
On rappelle que *E* peut aussi être noté $[\![a\,;b]\!]$.
Sur la ligne ci-dessous, écrire l'ensemble $A=\{x+y,(x\,;y)\in E^2\}$ sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets et exprimer le cardinal de *A* en fonction de *a* et *b*.

$$A=[\![2a\,;2b]\!] \qquad\qquad \text{card } A=2b-2a+1$$

A est l'ensemble des sommes que l'on peut former en prenant deux éléments de *E*.

La plus petite somme possible est 2*a*.
La plus grande est 2*b*.

III.

On considère l'ensemble $E=\{-1\,;0\,;1\}$ et on pose $F=E^2$.

• Compléter l'égalité : $\text{card } F=9$

On applique directement la formule donnant le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis.

• Écrire en extension le sous-ensemble *G* de *F* constitué des couples $(x\,;y)$ d'éléments de *E* tels que $xy>0$.

$$G=\{(1\,;1),(-1\,;-1)\}$$

IV.

On pose $x=\dfrac{89}{270}$.

Quel est le 2022$^{\text{e}}$ chiffre après la virgule dans le développement décimal propre de *x* ? 9

Grâce à la calculatrice, on obtient $x = 0,3296\underline{296}...$.

On constate que le développement est périodique à partir du deuxième chiffre après la virgule et que l'on a une période constituée de trois chiffres (296).
On cherche donc le 2021$^{\text{e}}$ chiffre en partant de la deuxième décimale.

$2021 = 673 \times 3 + 2$

On en déduit que le chiffre cherché est le 2$^{\text{e}}$ dans le groupe 296 c'est-à-dire 9.

V.

On considère l'ensemble $E = \{-\mathrm{i}\,;1\,;\mathrm{i}\}$ et on pose $F = E^2$.

> On peut noter que :
> • E est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$;
> • F est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$.

• Écrire en extension l'ensemble *F*.

$$F = \{(-\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}), (-\mathrm{i}\,;1), (-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}), (1\,;-\mathrm{i}), (1\,;1), (1\,;\mathrm{i}), (\mathrm{i}\,;-\mathrm{i}), (\mathrm{i}\,;1), (\mathrm{i}\,;\mathrm{i})\}$$

• Écrire en extension le sous-ensemble *G* de *F* constitué des couples $(x\,;y)$ d'éléments de *E* tels que *xy* soit un réel strictement positif.

$$G = \{(-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}), (1\,;1), (\mathrm{i}\,;-\mathrm{i})\}$$

• La proposition *P* : « $\forall x \in E \quad \frac{1}{x} \in E$ » est-elle vraie ou fausse ? V

Comme *E* est un ensemble fini, on teste chaque élément de *E*.

On a $\frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ (calculs très faciles à la main, qu'on peut aussi faire à la calculatrice). On constate à chaque fois que le résultat est un élément de *E*.

VI.

Dans cet exercice, les deux équations ont pour inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Compléter les phrases suivantes :

• La solution de l'équation $\mathrm{i}\bar{z} = \mathrm{i} - 2$ est $1 - 2\mathrm{i}$.

• Les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont i et – i.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}\overline{z}=\mathrm{i}-2 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{\mathrm{i}-2}{\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\frac{2}{\mathrm{i}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}=1+2\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z=1-2\mathrm{i}$$

● Pour l'équation $z^2=-1 \quad (2)$, on écrit directement les solutions sachant que $\mathrm{i}^2=-1$.
Il n'est pas utile d'avoir recours à la règle de cours concernant les équations de la forme $z^2=a$ où a est un réel.

VII.

À tout nombre complexe z on associe le nombre complexe $Z=2z+\mathrm{i}\overline{z}$. On rédigera les réponses sur les lignes.
1°) On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.
Exprimer Z en fonction de x et de y. On donnera le résultat sous forme algébrique.
2°) Déterminer le nombre complexe z tel que $Z=5-2\mathrm{i}$.

1°)

$$Z=2z+\mathrm{i}\overline{z}$$

$$=2(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)$$

$$=2x+2\mathrm{i}y+\mathrm{i}x+y$$

$$=2x+y+\mathrm{i}(x+2y)$$

2°)

On cherche le nombre complexe z tel que $Z=5-2\mathrm{i} \quad (1)$.

On reprend les notations et le résultat de la question précédente en posant $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

$(1) \Leftrightarrow 2x+y+\mathrm{i}(x+2y)=5-2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=-2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times(-1) \end{array}$ (par identification des parties réelle et imaginaire entre le membre de gauche et le membre de droite)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ 3y=-9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z=4-3\mathrm{i}$ (ligne indispensable)

Le nombre complexe z cherché est $4-3\mathrm{i}$.

On peut effectuer une vérification.