T exp

Interrogation écrite du jeudi 6 octobre 2022 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

• On note S l'ensemble des réels x tels que $\cos^2 x = 1$. Compléter l'égalité : $S = \{............, k \in \mathbb{Z}\}$.

• On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}\left(\cos^2 x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter les égalités suivantes pour x réel quelconque.

• Si $x \in S$, alors $f(x) = ...$ • Si $x \notin S$, alors $f(x) = ...$

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé. On pose $E = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x \leqslant n\}$.

On rappelle que E peut aussi être noté $[\![1 ; n]\!]$.

On pose $A = \left\{x + y, (x ; y) \in E^2\right\}$ et $B = \left\{xy, (x ; y) \in E^2\right\}$.

1°) Dans cette question, on prend $n = 3$.

Écrire sur la ligne ci-dessous A et B en extension.

………

2°) Dans cette question, on suppose que n est quelconque supérieur ou égal à 1.

Écrire A sur la ligne ci-dessous sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets.

…………………………………………………………………

Compléter l'égalité ci-dessous donnant le cardinal de A en fonction de n.

$$\text{card } A = ...$$

III. (2 points)

On considère l'ensemble $E = \{-1 ; 0 ; 1\}$ et on pose $F = E^2$.

• Compléter l'égalité : $\text{card } F = ...$

• Écrire en extension le sous-ensemble G de F constitué des couples $(x ; y)$ d'éléments de E tels que $xy > 0$.

$$G = ...$$

IV. (2 points)

On pose $r=\dfrac{43}{11}$.

Quel est le 2022e chiffre après la virgule dans le développement décimal propre de r ? ……

Quel est le plus petit entier naturel qu'il faut ajouter au numérateur et au dénominateur de l'écriture irréductible de r pour obtenir un nombre décimal ?

……

V. (2 points)

Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres pris dans l'ensemble $E=[\![1\,;9]\!]$, un même chiffre pouvant être répété plusieurs fois.

Combien de codes différents peut-on composer ? …….........................

VI. (2 points)

Calculer $z=\mathrm{i}-(2\mathrm{i})^2+1$ et $z'=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}-\mathrm{i}^2$.

On donnera les résultats sous forme algébrique.

…….........................　　　　　　　　…….........................

VII. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

On pose $z=x+\mathrm{i}$ et $z'=1+\mathrm{i}x$ où x est un réel.

1°) Calculer z^2 et z'^2. On donnera les résultats sous forme algébrique.

…….........................　　　　　　　　…….........................

2°) Pour chacune des propositions ci-dessous, écrire sur les pointillés en bout de ligne si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Proposition a : « Pour tout réel x, $z^2+z'^2$ est un imaginaire pur. » …..

Proposition b : « Pour tout réel x, $0<\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}\leqslant 1$. » …..

Proposition c : « Pour tout réel x, zz' est un imaginaire pur. » …..

Proposition d : « Il existe un réel x tel que z et z' soient conjugués. » …..

Corrigé de l'interrogation écrite du 6-10-2022

I.

• On note S l'ensemble des réels x tels que $\cos^2 x = 1$. Compléter l'égalité : $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

• On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}\left(\cos^2 x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Compléter les égalités suivantes pour x réel quelconque.

• Si $x \in S$, alors $f(x) = 1$

• Si $x \notin S$, alors $f(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ donc les valeurs possibles de $f(x)$ sont 0 et 1.

• Si $x \in S$, alors $\cos^2 x = 1$ donc $f(x) = \mathrm{E}(1) = 1$.
• Si $x \notin S$, alors $0 \leqslant \cos^2 x < 1$ donc $f(x) = 0$.

II.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 fixé. On pose $E = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leqslant x \leqslant n\}$.
On rappelle que E peut aussi être noté $[\![1\,;n]\!]$.
On pose $A = \left\{x + y, (x\,;y) \in E^2\right\}$ et $B = \left\{xy, (x\,;y) \in E^2\right\}$.

1°) Dans cette question, on prend $n = 3$.
Écrire sur la ligne ci-dessous A et B en extension.

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$$

$E = \{1, 2, 3\}$

A est l'ensemble de toutes les sommes possibles en ajoutant deux éléments de E.

B est l'ensemble de tous les produits possibles en ajoutant deux éléments de E.

On notera que A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et même de $\mathbb{N}$.

2°) Dans cette question, on suppose que n est quelconque supérieur ou égal à 1.

Écrire A sur la ligne ci-dessous sous la forme d'un intervalle d'entiers avec doubles crochets.

$$A = [\![2\,;2n]\!]$$

On ne peut pas écrire B comme intervalle d'entiers.

Compléter l'égalité ci-dessous donnant le cardinal de A en fonction de n.

$$\operatorname{card} A = 2n - 1$$

On applique la formule donnant le nombre d'éléments d'un intervalle d'entiers : $\text{card } A = 2n - 2 + 1$ qui donne $\text{card } A = 2n - 1$.

III.

On considère l'ensemble $E = \{-1\,;0\,;1\}$ et on pose $F = E^2$.

• Compléter l'égalité : $\text{card } F = 9$

On applique la formule du cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis.

$\text{card } F = (\text{card } E)^2 = 3^2 = 9$

• Écrire en extension le sous-ensemble *G* de *F* constitué des couples $(x\,;y)$ d'éléments de *E* tels que $xy > 0$.

$$G = \{(1\,;1), (-1\,;-1)\}$$

On notera que *G* est un sous-ensemble de *F*. On a donc $G \subset F$.

IV.

On pose $r = \dfrac{43}{11}$.

Quel est le 2022$^{\text{e}}$ chiffre après la virgule dans le développement décimal propre de *r* ? 0

Avec la calculatrice ou division à la main, on obtient $r = 3{,}90\underline{90}\ldots$.
Le développement décimal propre de *r* est périodique de période 2.
Tous les chiffres de rang impair sont égaux à 9.
Tous les chiffres de rang pair sont égaux à 0.

Quel est le plus petit entier naturel qu'il faut ajouter au numérateur et au dénominateur de l'écriture irréductible de *r* pour obtenir un nombre décimal ?

5

V.

Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres pris dans l'ensemble $E = [\![1\,;9]\!]$, un même chiffre pouvant être répété plusieurs fois.

Combien de codes différents peut-on composer ? 6561

Il y a un seul moyen pour répondre à la question.

Un code est un quadruplet $(a\,;b\,;c\,;d)$ avec *a*, *b*, *c*, *d* dans *E*.
L'ensemble des quadruplets d'éléments de *E* se note E^4.
On a $\text{card } E^4 = (\text{card } E)^4 = 9^4 = 6561$ (propriété du cours $\text{card } A \times B = \text{card } A \times \text{card } B$).
On peut donc composer 6561 codes différents.

VI.

Calculer $z = \mathrm{i} - (2\mathrm{i})^2 + 1$ et $z' = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} - \mathrm{i}^2$.

On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z = 5 + \mathrm{i}$ $\qquad\qquad$ $z' = 1 - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

$z = \mathrm{i} - (2\mathrm{i})^2 + 1$ $= \mathrm{i} + 4 + 1$ $= 5 + \mathrm{i}$	$z' = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} - \mathrm{i}^2$ $= -\dfrac{\mathrm{i}}{2} + 1$ $= 1 - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

On vérifie évidemment les deux résultats à l'aide de la calculatrice.

VII.

On pose $z = x + \mathrm{i}$ et $z' = 1 + \mathrm{i}x$ où x est un réel.

1°) Calculer z^2 et z'^2. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z^2 = x^2 - 1 + 2\mathrm{i}x$ $\qquad\qquad$ $z'^2 = 1 - x^2 + 2\mathrm{i}x$

$z^2 = (x + \mathrm{i})^2$ $= x^2 + 2\mathrm{i}x + \mathrm{i}^2$ $= x^2 - 1 + 2\mathrm{i}x$	$z'^2 = (1 + \mathrm{i}x)^2$ $= 1 + 2\mathrm{i}x + (\mathrm{i}x)^2$ $= 1 - x^2 + 2\mathrm{i}x$

On vérifie les deux résultats à la calculatrice en remplaçant x par π.

2°) Pour chacune des propositions ci-dessous, écrire sur les pointillés en bout de ligne si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Proposition a : « Pour tout réel x, $z^2 + z'^2$ est un imaginaire pur. » V

Proposition b : « Pour tout réel x, $0 < \mathrm{Im}\dfrac{1}{z} \leqslant 1$. » F

Proposition c : « Pour tout réel x, zz' est un imaginaire pur. » V

Proposition d : « Il existe un réel x tel que z et z' soient conjugués. » F

Proposition a :

$$z^2 + z'^2 = \cancel{x^2} - \cancel{1} + 2ix + \cancel{1} - \cancel{x^2} + 2ix$$

$$= 4ix$$

$z^2 + z'^2$ est un imaginaire pur.

Proposition b :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+i}$$

$$= \frac{x-i}{(x+i)(x-i)}$$

$$= \frac{x-i}{x^2+1}$$

On a donc $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = -\frac{1}{x^2+1}$.

On observe qu'elle est strictement négative donc la proposition b est fausse.

Proposition c :

$$zz' = (x+i)(1+ix)$$

$$= x + ix^2 + i + i^2x$$

$$= \cancel{x} + ix^2 + i - \cancel{x}$$

$$= i(x^2+1)$$

On en déduit que zz' est un imaginaire pur.

Proposition d :

Pour que z et z' soient conjugués, il faut et il suffit que $\begin{cases} x = 1 \\ 1 = -x \end{cases}$, ce qui est impossible.