T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 7 octobre 2022

30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les droites D et D' qui admettent les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D' \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. ……………………..

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de D'. ……………………..

Les droites D et D' sont-elles parallèles ? Justifier.

………

………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Compléter : $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{}$ …….. $\qquad \mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{}$ …….. .

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur la feuille annexe :
- faire le tableau de variations de la fonction exponentielle avec les limites ;
- tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

La fonction exponentielle est-elle minorée sur $\mathbb{R}$? majorée sur $\mathbb{R}$? bornée sur $\mathbb{R}$?

………

2°) On considère l'équation $\mathrm{e}^x = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où a est un réel donné.
Donner l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

………

………

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer la dérivée de *f*. On donnera le résultat sous forme factorisée. $\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………..

2°) En déduire la dérivée des fonctions $f_1 : x \mapsto 2xe^x$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{xe^x}{2}$, $f_3 : x \mapsto 4 - 3xe^x$ (forme factorisée).

……………………………………	……………………………………	……………………………………

3°) La fonction *f* est-elle une solution de l'équation différentielle $y' - y = e^x$? ☐ oui ☐ non

---

IV. (3 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto e^{2x} - e^x$ et $F : x \mapsto \dfrac{\left(e^x - 1\right)^2}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

……...

……...

……...

……...

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) Choisir la (ou les) réponses possibles.
Pour tout réel *x*, $e^{2x} + e^{4x}$ est égal à :

A. e^{6x} B. $e^{2x}\left(1 + e^2\right)$ C. $e^{3x}\left(e^x + e^{-x}\right)$ D. e^{8x^2} E. $e^{2x}\left(e^{2x} + 1\right)$

2°) La solution de l'équation $\dfrac{\left(e^{2x}\right)^2}{e^x} + \dfrac{e^x}{e^{-2x}} = 4$ est …………… .
Rédiger entièrement la résolution au verso de la feuille annexe.

3°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2 - e^x$ est la fonction $F : x \mapsto$ ....

VI. (1 point)

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$.

Calculer la dérivée *g* en fonction de la dérivée de *f*. $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) =$ ………………

Numéro : …..

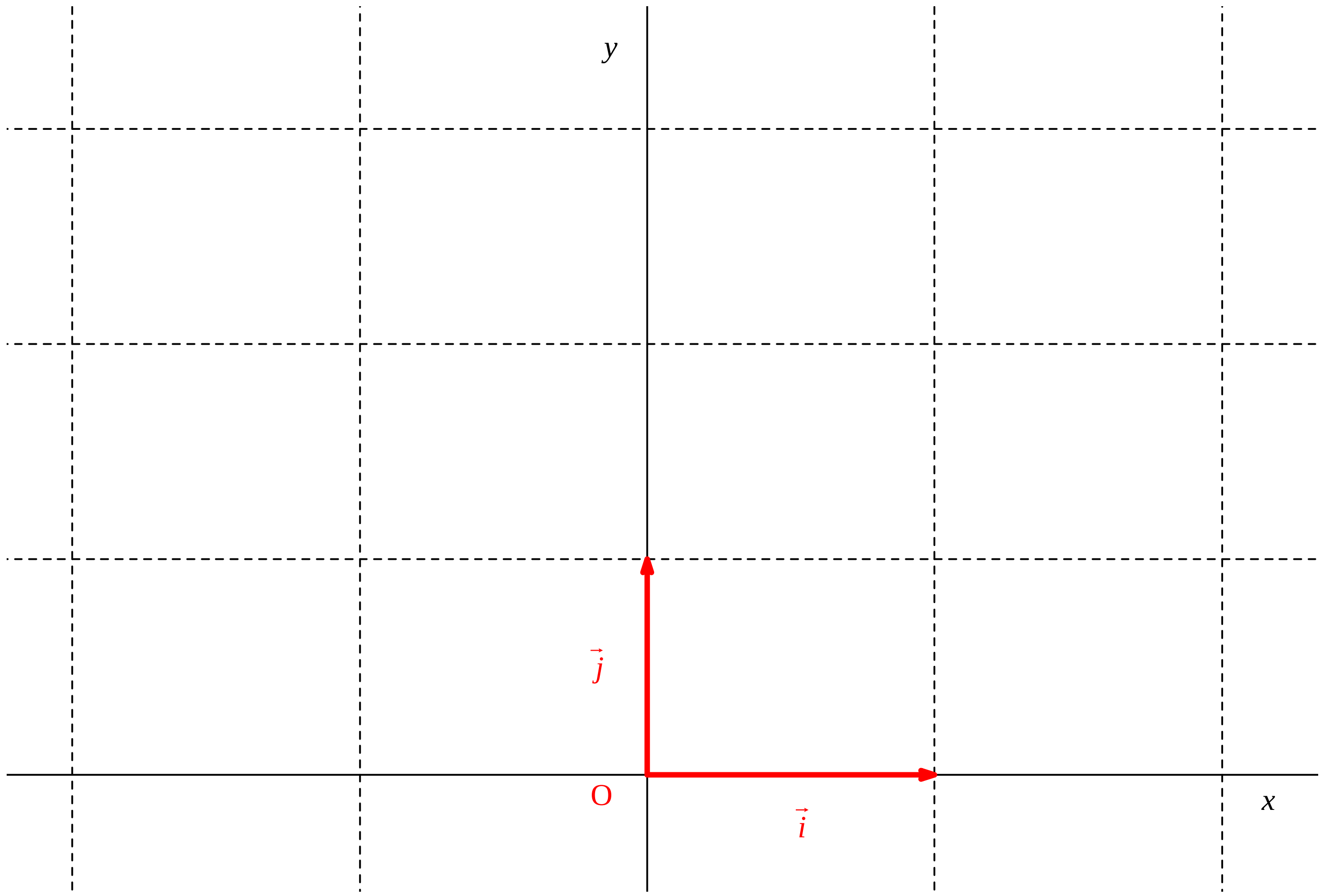
Prénom et nom : ……………………………………………….

Annexe de l'interrogation écrite du vendredi 7 octobre 2022

II.

Tableau de variations :

Graphique :



Corrigé de l'interrogation écrite du 7-10-2022

I.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les droites D et D' qui admettent les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad\qquad D' \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de D'. $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Les droites D et D' sont-elles parallèles ? Justifier.

On constate que $\vec{v} = -2\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites D et D' sont parallèles.

On peut aussi utiliser la notion de déterminant.

Rappel : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (déterminant)

La notion de déterminant est utilisée en géométrie pour la colinéarité des vecteurs dans le plan muni d'un repère.

On calcule le déterminant du couple $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \times (-4) - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$$

Le déterminant est nul donc on peut affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

II.

1°) Compléter : $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\qquad$ $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur la feuille annexe :

- faire le tableau de variations de la fonction exponentielle avec les limites ;
- tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

On place les points $A(0\,;1)$ et $B(1\,;e)$ (approximativement pour B).

Pour plus de précision, on peut aussi placer le point d'abscisse – 1.

La tangente en A à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur 1 (car $\exp'(0)=e^0=1$).

La tangente en B à $\mathcal{C}$ a passe par l'origine O du repère (car elle a pour équation $y=ex$).

La fonction exponentielle est-elle minorée sur $\mathbb{R}$? majorée sur $\mathbb{R}$? bornée sur $\mathbb{R}$?

La fonction exponentielle est minorée sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

Elle n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) On considère l'équation $e^x=a$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ où a est un réel donné.
Donner l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation.

1^er^ cas : $a>0$ $\quad S=\{\ln a\}$

2^e^ cas : $a\leqslant 0$ $\quad S=\varnothing$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer la dérivée de f. On donnera le résultat sous forme factorisée. $\qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=(x+1)e^x$

On applique la formule de dérivation d'un produit.

2°) En déduire la dérivée des fonctions $f_1 : x\mapsto 2xe^x$, $f_2 : x\mapsto \dfrac{xe^x}{2}$, $f_3 : x\mapsto 4-3xe^x$ (forme factorisée).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_1'(x)=2(x+1)e^x$	$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_2'(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{2}$	$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_3'(x)=-3(x+1)e^x$

• Pour f_1, on observe que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f_1(x)=2f(x)$. Autrement dit, $f_1=2f$.
On en déduit que $f_1'=2f'$ (formule du cours $(ku)'=ku'$).

• Pour f_2, on observe que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f_2(x)=\dfrac{f(x)}{2}$. Autrement dit, $f_2=\dfrac{f}{2}$ ce que l'on peut écrire $f_2=\dfrac{1}{2}f$.
On en déduit que $f_2'=\dfrac{1}{2}f'$ (formule du cours $(ku)'=ku'$) soit $f_2'=\dfrac{f'}{2}$.

• Pour f_3, on observe que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f_3(x)=4-3f(x)$. Autrement dit, $f_3=4-3f$ ce que l'on peut écrire $f_2=\dfrac{1}{2}f$.
On en déduit que $f_3'=0-3f'$ soit $f_3'=-3f'$.

3°) La fonction f est-elle une solution de l'équation différentielle $y'-y=\mathrm{e}^x$? ☒ oui ☐ non

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)-f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x$$

$$=\cancel{x\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x-\cancel{x\mathrm{e}^x}$$

$$=\mathrm{e}^x$$

On en déduit que f est une solution de l'équation différentielle $y'-y=\mathrm{e}^x$.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \dfrac{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1ère méthode :

On dérive directement l'expression de F.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}'(x)=\frac{\cancel{2}\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{\cancel{2}}\quad \text{(on applique la formule } \left(u^2\right)'=2uu'\text{)}$$

$$=\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)$$

$$=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$$

$$=f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2e méthode :

On développe l'expression de F.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{F}(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{2}$$

On calcule ensuite la dérivée de F.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2e^{x}}{2}$

$= \dfrac{\cancel{2}\left(e^{2x} - e^{x}\right)}{\cancel{2}}$

$= e^{2x} - e^{x}$

$= f(x)$

On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

V.

1°) Choisir la (ou les) réponses possibles.
Pour tout réel x, $e^{2x} + e^{4x}$ est égal à :

A. e^{6x} B. $e^{2x}\left(1 + e^{2}\right)$ C. $e^{3x}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ D. e^{8x^2} E. $e^{2x}\left(e^{2x} + 1\right)$

Les réponses exactes sont les réponses C et E.

2°) La solution de l'équation $\dfrac{\left(e^{2x}\right)^2}{e^{x}} + \dfrac{e^{x}}{e^{-2x}} = 4$ est $\dfrac{\ln 2}{3}$.
Rédiger entièrement la résolution au verso de la feuille annexe.

Résolvons dans R l'équation $\dfrac{\left(e^{2x}\right)^2}{e^{x}} + \dfrac{e^{x}}{e^{-2x}} = 4 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{e^{4x}}{e^{x}} + e^{x-(-2x)} = 4$

$\Leftrightarrow e^{4x-x} + e^{x+2x} = 4$

$\Leftrightarrow e^{3x} + e^{3x} = 4$

$\Leftrightarrow 2e^{3x} = 4$

$\Leftrightarrow e^{3x} = 2$

$\Leftrightarrow 3x = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 2}{3}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \left\{\dfrac{\ln 2}{3}\right\}$

On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice (résolution approchée mais intéressante tout de même).

3°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2 - \mathrm{e}^{x}$ est la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 2x - \mathrm{e}^{x}$.

VI.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$.

Calculer la dérivée g en fonction de la dérivée de f. $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 2 \times f'(2x)$

On observe que g est la composée de la fonction $u : x \mapsto 2x$ suivie de la fonction f ce qui se note $g = f \circ u$.

On applique la formule de dérivation d'une composée $(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\left[u(x)\right]$.

$u'(x) = 2$ d'où l'égalité $g'(x) = 2 \times f'(2x)$.

uméro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Annexe de l’interrogation écrite du vendredi 7 octobre 2022

II.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de exp	0	↗	$+\infty$

Graphique :