T exp

Interrogation écrite du jeudi 29 septembre 2022 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On note S l'ensemble des réels x tels que $\cos^2 x = 1$. Compléter l'égalité : $S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots, k \in \mathbb{Z}\}$

2°) On rappelle que pour tout réel t la notation $\mathrm{E}(t)$ désigne la partie entière de t, c'est-à-dire l'unique entier relatif p tel que $p \leqslant t < p+1$.

Soit x un réel quelconque de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Compléter l'égalité : $\mathrm{E}(\cos x) = \ldots.$

II. (2 points : 1 point + 1 point)

Compléter les équivalences ci-contre pour $x \in \mathbb{R}$:

$x^2 = 1 \Leftrightarrow$ ……………………………

$x^2 \neq 1 \Leftrightarrow$ ……………………………

III. (2 points)

Soit n un entier naturel. On considère le polynôme $P(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ de variable $x \in \mathbb{R}$.

Quel est le degré de $P(x)$?

…….. (une seule réponse sans égalité)

On note E l'ensemble des racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Compléter l'égalité ci-dessous en utilisant une notation du cours.

$E = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

IV. (1 point)

Soit A un point fixé du plan P et r un réel strictement positif donné. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r.

Compléter l'égalité ci-contre : $\mathcal{C} = \{\mathrm{M} \in P \,/\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

V. (2 points)

Le système hexadécimal (ou base seize) emploie 16 symboles (comme on n'a que 10 chiffres, on utilise des lettres pour compléter) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

Quelle est l'écriture en base dix de l'entier naturel qui admet BAC pour écriture hexadécimale ? ……………..

VI. (2 points)

Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres pris dans l'ensemble $E = [\![0\,;9]\!]$.

Combien de codes différents peut-on composer ? ……........................

VII. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point + 2 points)

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $x=\overline{11}^{(b)}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'écriture en base b du nombre $y=x^2$.

1°) Compléter le tableau ci-dessous.

	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$
Écriture en base dix de x					
Écriture en base dix de y					
Écriture en base b de y					

2°) Que peut-on conjecturer pour l'écriture en base b de y pour b entier naturel supérieur ou égal à 3 ?

……..

Démontrer cette conjecture.

……..

……..

……..

VIII. (2 points)

On note N l'entier naturel qui s'écrit 23 en base dix.

Déterminer l'entier naturel $b\geqslant 4$ tel que l'écriture en base b de N soit $\overline{32}^{(b)}$.

……..

……..

……..

IX. (1 point)

On pose $E=\{0\,;1\}$.

Écriture en extension l'ensemble E^2. $E^2=$ ………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 29-9-2022

I.

1°) On note S l'ensemble des réels x tels que $\cos^2 x = 1$. Compléter l'égalité : $S = \{k\pi \,, k \in \mathbb{Z}\}$.

On cherche les réels dont le cosinus est égal à 1 ou à – 1.

On utilise ensuite le cercle trigonométrique.

On voit qu'il s'agit des réels de la forme $k\pi$ avec k entier relatif.

2°) On rappelle que pour tout réel t la notation $\mathrm{E}(t)$ désigne la partie entière de t, c'est-à-dire l'unique entier relatif p tel que $p \leqslant t < p+1$.

Soit x un réel quelconque de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Compléter l'égalité : $\mathrm{E}(\cos x) = 0$.

On utilise à nouveau le cercle trigonométrique.

Pour $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \cos x < 1$ (on notera l'inégalité large à gauche et stricte à droite).

On notera que $\cos 0 = 1$ et que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

On en déduit que $\mathrm{E}(\cos x) = 0$.

II.

Compléter les équivalences ci-contre pour $x \in \mathbb{R}$:

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$

On applique le principe de négation pour les connecteurs logiques « ou » et « et ».

Étant données deux propositions A et B,

- la négation de « A ou B » est « (non A) et (non B) ».
- la négation de « A et B » est « (non A) ou (non B) ».

Dans la négation, le « ou » devient « et » et le « et » devient « ou ».

III.

Soit n un entier naturel. On considère le polynôme $P(x) = x(x-1)(x-2)...(x-n)$ de variable $x \in \mathbb{R}$.

Quel est le degré de $P(x)$?

$n+1$ (une seule réponse sans égalité)

On note E l'ensemble des racines de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Compléter l'égalité ci-dessous en utilisant une notation du cours.

$E = [\![0\,;n]\!]$

On sait que $P(x)=x(x-1)(x-2)...(x-n)$.
Les petits points signifient qu'il s'agit d'un produit.

On peut écrire : $P(x)=\prod_{k=0}^{k=n}(x-k)$.

On observe qu'il y a $n+1$ facteurs.
Si on développait cette expression, le monôme de plus haut degré serait $\underbrace{x\times...\times x}_{n+1}$ c'est-à-dire x^{n+1}.

Par définition, les racines de $P(x)$ sont les réels tels que $P(x)=0$. Ce sont les réels qui annulent $P(x)$.
Au lieu du mot « racine », on peut aussi parler de « zéro ».

Comme $P(x)$ est un produit, on voit immédiatement que les racines de $P(x)$ sont 0, 1, 2 … *n* autrement dit tous les entiers naturels de 0 à *n*.
L'ensemble *E* peut donc se noter $[\![0\,;n]\!]$ (notation d'intervalle d'entiers avec doubles crochets).

IV.

Soit A un point fixé du plan *P* et *r* un réel strictement positif donné. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon *r*.
Compléter l'égalité ci-contre : $\mathcal{C}=\{\mathrm{M}\in P\,/\,\mathrm{AM}=r\}$

V.

Le système hexadécimal (ou base seize) emploie 16 symboles (comme on n'a que 10 chiffres, on utilise des lettres pour compléter) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.
Quelle est l'écriture en base dix de l'entier naturel qui admet BAC pour écriture hexadécimale ? 2988

$$\overline{\mathrm{BAC}}^{(\text{seize})}=11\times16^2+10\times16^1+12\times16^0$$

$$=1816+160+12$$

$$=2988$$

VI.

Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres pris dans l'ensemble $E=[\![0\,;9]\!]$.
Combien de codes différents peut-on composer ? 10000

1ère méthode :

On obtient tous les nombres de 0000 à 9999.
On peut donc obtenir tous les nombres de l'intervalle d'entiers $[\![0\,;9999]\!]$.
On applique la formule $9999-0+1=10000$.
On peut donc composer 10000 codes différents.

2^e^ méthode :

Un code est un quadruplet $(a\,;b\,;c\,;d)$ avec a, b, c, d dans E.
L'ensemble des quadruplets d'éléments de E se note E^4.
On a $\text{card } E^4 = (\text{card } E)^4 = 10^4$ (propriété du cours $\text{card } A \times B = \text{card } A \times \text{card } B$).
On peut donc composer 10000 codes différents.

VII.

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $x = \overline{11}^{(b)}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'écriture en base b du nombre $y = x^2$.

1°) Compléter le tableau ci-dessous.

	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$
Écriture en base dix de x	3	4	5	6	7
Écriture en base dix de y	9	16	25	36	49
Écriture en base b de y	1001	121	121	121	121

Pour déterminer les écritures en base b de y, on peut utiliser la méthode des divisions euclidiennes successives de quotients.

Pour écrire 9 en base 2, on peut se passer de l'écriture de divisions euclidiennes en écrivant
$9 = 2^3 + 1 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.

Pour écrire 16 en base 3 :

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & \begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & \begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

2°) Que peut-on conjecturer pour l'écriture en base b de y pour b entier naturel supérieur ou égal à 3 ?

On peut conjecturer que l'écriture en base b de y pour b entier naturel supérieur ou égal à 3 est 121, autrement dit que $y = \overline{121}^{(b)}$.

Démontrer cette conjecture.

Pour démontrer la conjecture, on part de la décomposition en base b de x : $x = 1 \times b^1 + 1 \times b^0$ soit $x = b + 1$.
On calcule alors y en fonction de b :

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ &= (b+1)^2 \\ &= b^2 + 2b + 1 \\ &= 1 \times b^2 + 2 \times b^1 + 1 \times b^0 \\ &= \overline{121}^{(b)} \end{aligned}$$

Cela ne marche pas pour $b = 2$ car le chiffre 2 ne peut être utilisé en base deux.

VIII.

On note N l'entier naturel qui s'écrit 23 en base dix.
Déterminer l'entier naturel $b \geqslant 4$ tel que l'écriture en base b de N soit $\overline{32}^{(b)}$.

On sait que N s'écrit 23 en base dix et 32 en base b.

On a donc $3b + 2 = 23$.

On obtient $3b = 21$ ce qui donne immédiatement $b = 7$.

On peut faire une vérification rapide en déterminant l'écriture en base sept de 23.

IX.

On pose $E = \{0\,;1\}$.
Écriture en extension l'ensemble E^2. $E^2 = \{(0\,;0), (0\,;1), (1\,;0), (1\,;1)\}$

E^2 désigne le produit cartésien de E par lui-même, autrement dit $E^2 = E \times E$.

Par définition, E^2 est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ avec x et y dans E.

On a donc $E^2 = \{(0\,;0), (0\,;1), (1\,;0), (1\,;1)\}$.

Rappel :

$\text{card } E^2 = (\text{card } E)^2 = 2^2 = 4$ (propriété du cours $\text{card } A \times B = \text{card } A \times \text{card } B$).