T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 30 septembre 2022

50 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……………………………………………….**

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques ci-contre :

$$D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right).$$

1°) Préciser les coordonnées du point A de D correspondant au paramètre $t = 0$. ……………………..

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. ……………………..

Tracer D sur le graphique donné en annexe.

2°) On note E et F les points d'intersection de D respectivement avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées de D.

Le but de cette question est de calculer l'abscisse de E et l'ordonnée de F.

Le paramètre t du point E sur la droite D vérifie	Le paramètre t du point F sur la droite D vérifie
l'égalité ……………………………….. .	l'égalité ……………………………….. .
En déduire la valeur de t correspondante. …….	En déduire la valeur de t correspondante. …….
Calculer alors l'abscisse de E.	Calculer alors l'ordonnée de F.
$x_{\mathrm{E}} =$ ………………………	$y_{\mathrm{F}} =$ ………………………

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Factoriser « au maximum » le polynôme $P\left(x\right) = x^2 + 5x + 6$ puis le polynôme $Q\left(x\right) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

……………………………………………… ………………………………………………

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $I = \left[0 \,;+\infty\right[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Rappeler l'expression de $f'\left(x\right)$ pour x réel strictement positif quelconque. $\forall x \in \left]0 \,;+\infty\right[$ ………………

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Calculer le coefficient directeur de T puis tracer T sur le graphique donné en annexe.

……

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points))

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ et $g : x \mapsto 1-x^2$ définies respectivement sur l'intervalle $I = [-2\,;2]$ et sur $\mathbb{R}$.

1°) On pose $J =]-2\,;2[$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in J$. $\forall x \in J$ ……………………..

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2°) On considère h la composée de f suivie de g.

On rappelle que h se note $g \circ f$.

Calculer $h(x)$ pour x réel quelconque dans I. $\forall x \in I$ ……………………..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-m}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Dans cette question, on suppose que $m = 1$.

Calculer $f_1'(x)$ pour x réel quelconque.

Quel est le sens de variation de f_1 ?

Répondre par des phrases en rédigeant soigneusement.

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on suppose que m est un réel quelconque.

On admet que pour tout réel x on a $f_m'(x) = \dfrac{x^4+3x^2+(2m-2)x}{(x^2+1)^2}$.

Pour quelle valeur de m la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse – 1 est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? …………… (une seule égalité)

VI. (2 points)

On considère les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto 1-\dfrac{1}{2x^2}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ définies sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I.

Présenter les calculs sur les lignes ci-contre et rédiger une phrase de conclusion sur la ligne ci-dessous :

………………………………………………………

………………………………………………………

………………………………………………………

……

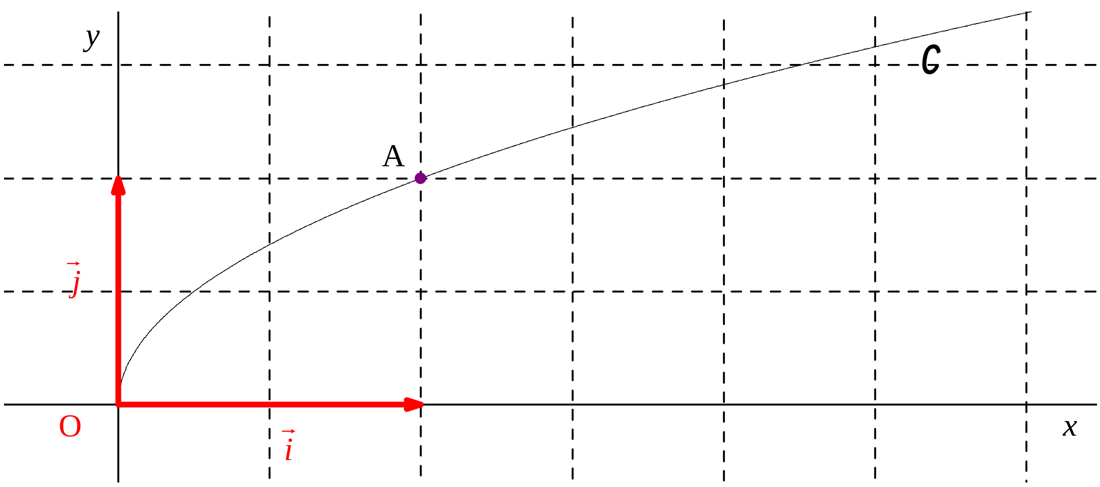
Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………

Graphiques de l'interrogation écrite du vendredi 30 septembre 2022

I.

III.



Corrigé de l'interrogation écrite du 30-9-2022

I.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système d'équations paramétriques ci-contre :

$$D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right).$$

1°) Préciser les coordonnées du point A de D correspondant au paramètre $t = 0$.

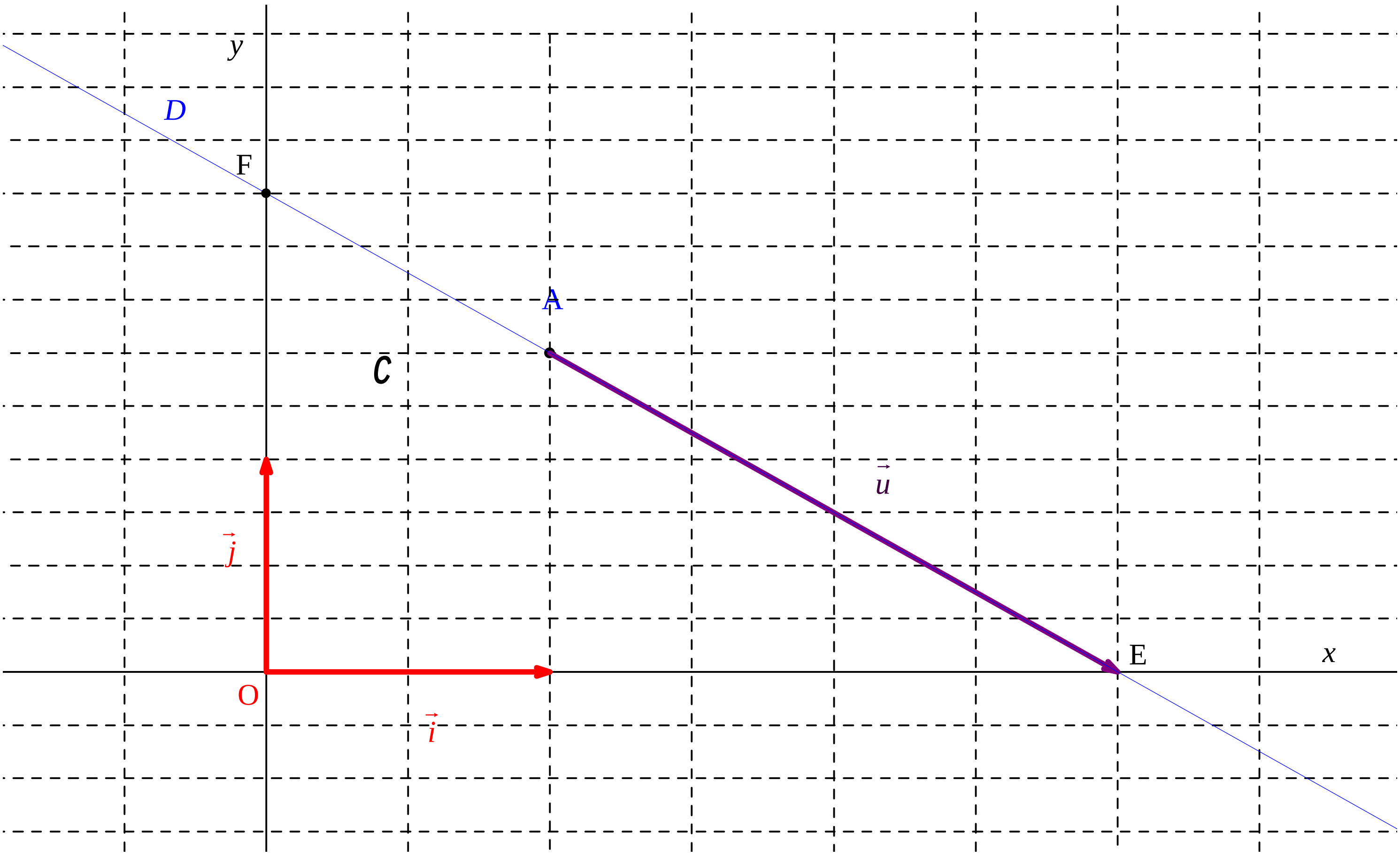
$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Tracer D sur le graphique donné en annexe.

On vérifie le tracé avec la calculatrice en mode paramétrique.



2°) On note E et F les points d'intersection de D respectivement avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées de D.
Le but de cette question est de calculer l'abscisse de E et l'ordonnée de F.

Le paramètre t du point E sur la droite D vérifie

l'égalité $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t=0$.

En déduire la valeur de t correspondante. $t=1$
Calculer alors l'abscisse de E.

$x_{\text{E}}=1+2\times1=3$

Le paramètre t du point F sur la droite D vérifie

l'égalité $1+2t=0$.

En déduire la valeur de t correspondante. $t=-\frac{1}{2}$

Calculer alors l'ordonnée de F.

$y_{\text{F}}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$

On vérifie sur le graphique

II.

Factoriser « au maximum » le polynôme $P(x)=x^2+5x+6$ puis le polynôme $Q(x)=x^3+4x^2+x-6$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad P(x)=(x+2)(x+3)$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$

Le polynôme $P(x)$ admet pour racines – 2 et – 3 (obtenues par exemple en calculant le discriminant).
On applique la propriété de factorisation d'un polynôme du second degré en facteurs du premier degré.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad P(x)=\left(\text{coefficient du monôme en } x^2\right)\times(x-\text{racine 1})\times(x-\text{racine 2})$$

Ici, le coefficient du monôme en x^2 est égal à 1.
On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R} \quad P(x)=(x+2)(x+3)$.

On peut vérifier cette factorisation en développant au brouillon l'expression $(x+2)(x+3)$.

Pour factoriser $Q(x)$, on cherche d'abord une racine évidente.
On constate que 1 est racine de $Q(x)$.
On peut en déduire que $Q(x)$ est factorisable par $x-1$.

1ère méthode :
Il existe donc un polynôme $f(x)$ tel que $\forall x\in\mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)f(x)$.
Comme $\deg\left[Q(x)\right]=3$, on a : $\deg\left[f(x)\right]=2$.

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq0$.

On pose $R(x)=(x-1)f(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad R(x)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$$

$$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Pour que les polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ soient égaux quel que soit le réel x, il faut et il suffit que $\begin{cases} a=1 & (1) \\ b-a=4 & (2) \\ c-b=1 & (3) \\ -c=-6 & (4) \end{cases}$

(par identification des coefficients).

(4) donne $c=6$.

Compte tenu de (1), (2) donne $b=5$.

Pour les valeurs de b et c trouvées, l'équation (3) est vérifiée.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=x^2+5x+6$ et par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$.

On constate que $f(x)=P(x)$.
On peut donc utiliser la factorisation de $P(x)$ trouvée précédemment.
On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$.

2^e^ méthode :

On effectue une petite recherche par calcul mental (et éventuellement au brouillon) et on écrit tout de suite $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$.
On continue ensuite comme on a fait avec la première méthode.

3^e^ méthode :

On effectue une division euclidienne de polynômes.

On peut aussi trouver que – 2 est racine de $Q(x)$.
Dans ce cas, on factorise par $x+2$.
On obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)=(x+2)(x^2+2x-3)$.
On factorise ensuite x^2+2x-3 en produit de polynômes du premier degré comme on l'a fait pour $P(x)$.
On obtient évidemment le même résultat : $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $I=[0\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Rappeler l'expression de $f'(x)$ pour x réel strictement positif quelconque.

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Calculer le coefficient directeur de T puis tracer T sur le graphique donné en annexe.

On utilise le nombre dérivé de f en 1.

$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ donc T a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

On vérifie avec la calculatrice.

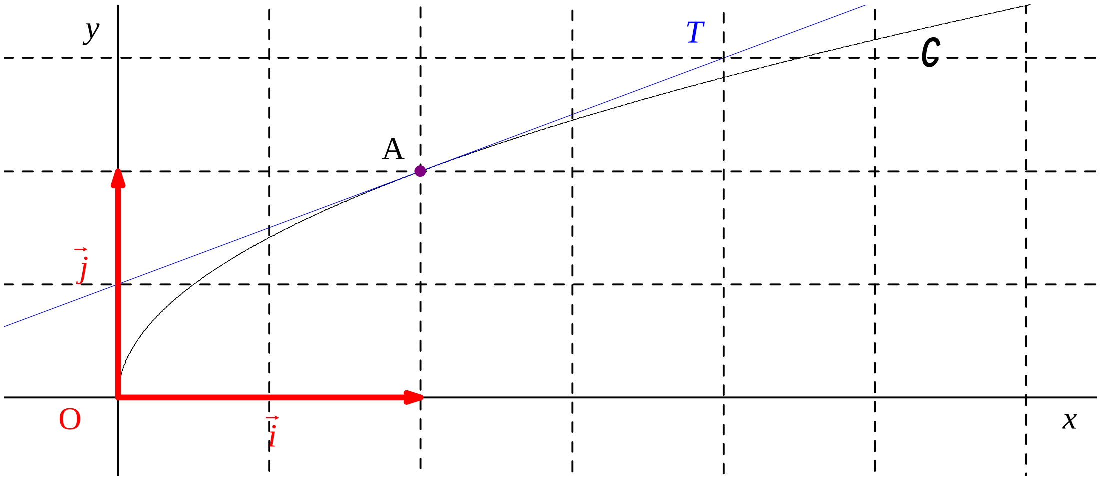
L'équation réduite de T (avec la formule générale de la tangente) ne présente aucun intérêt ici.

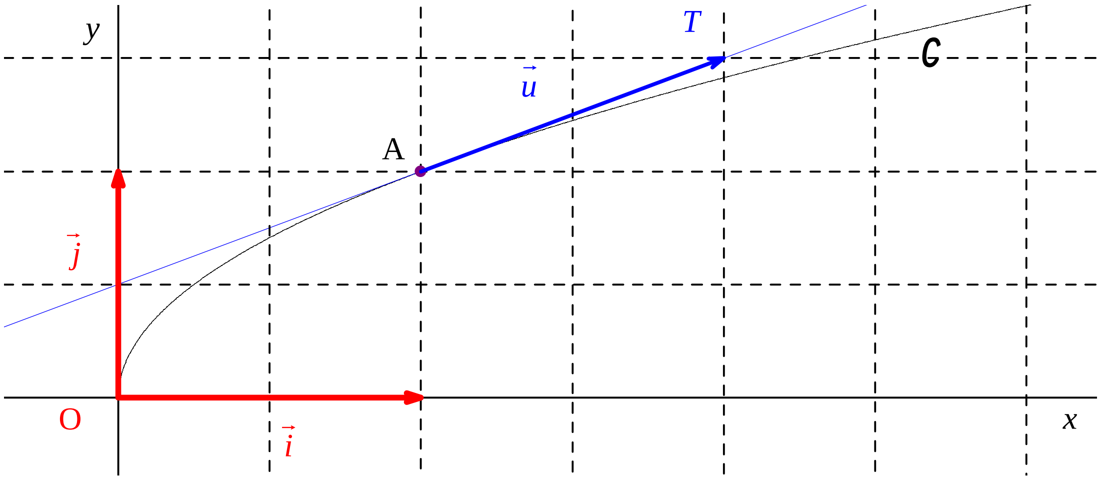
Pour le tracé de T, on utilise un vecteur directeur.

On sait que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

On peut écrire $\vec{u}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$.

On construit un représentant de $\vec{u}$ en prenant pour origine n'importe quel point : on peut prendre l'origine O du repère ou le point A ou encore tout autre point du plan.





On vérifie le tracé avec la calculatrice.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ et $g : x \mapsto 1-x^2$ définies respectivement sur l'intervalle $I = [-2\,;2]$ et sur $\mathbb{R}$.

1°) On pose $J =]-2\,;2[$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in J$.

$\forall x \in J \quad f'(1) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

On applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

2°) On considère h la composée de f suivie de g.
On rappelle que h se note $g \circ f$.
Calculer $h(x)$ pour x réel quelconque dans I.

$\forall x \in I \quad h(x) = x^2 - 3$

$$\begin{aligned}
\forall x \in I \quad h(x) &= g\left[f(x)\right] \\
&= g\left(\sqrt{4-x^2}\right) \\
&= 1-\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \\
&= 1-\left(4-x^2\right) \\
&= 1-4+x^2 \\
&= x^2-3
\end{aligned}$$

V.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{x^3-x^2-m}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Dans cette question, on suppose que $m = 1$.
Calculer $f_1'(x)$ pour x réel quelconque.

Quel est le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}$?
Répondre par des phrases en rédigeant soigneusement.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1'(x) = \frac{\left(3x^2 - 2x\right) \times \left(x^2 + 1\right) - \left(x^3 - x^2 - 1\right) \times 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - \cancel{2x^3} + 3x^2 - \cancel{2x} - 2x^4 + \cancel{2x^3} + \cancel{2x}}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1'(x) \geqslant 0$ de manière évidente.

On en déduit que f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut être plus précis en disant que $f_1'(x)$ est positif ou nul et s'annule en 0 qui est une valeur isolée.

On en déduit f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Dans cette question, on suppose que *m* est un réel quelconque.

On admet que pour tout réel *x* on a $f_m'(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + (2m - 2)x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

Pour quelle valeur de *m* la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse – 1 est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?

$m = 3$ (une seule égalité)

On cherche *m* tel que $f_m'(-1) = 0 \quad (1)$.

$$f_m'(-1) = \frac{(-1)^4 + 3 \times (-1)^2 + (2m - 2) \times (-1)}{\left[(-1)^2 + 1\right]^2}$$

$$= \frac{1 + 3 \times 1 - (2m - 2)}{(1 + 1)^2}$$

$$= \frac{4 - 2m + 2}{4}$$

$$= \frac{6 - 2m}{4}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{6 - 2m}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = 3$$

VI.

On considère les fonctions F : $x \mapsto 1-\dfrac{1}{2x^2}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$

définies sur l'intervalle $I = \left]0\,;+\infty\right[$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I.

Présenter les calculs sur les lignes ci-contre et rédiger une phrase de conclusion sur la ligne ci-dessous :

On va calculer la dérivée de F pour voir que l'on obtient bien f.

F est une fonction rationnelle donc F est dérivable sur I.

Pour effectuer commodément le calcul de la dérivée, on effectue la réécriture : $\mathrm{F}(x)=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^2}$.

On applique la formule $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

$$\forall x \in I \quad \mathrm{F}'(x)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3}$$

$$=f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur I.

Rattrapage samedi 15 octobre 2022 pour 2 élèves

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note D la droite définie par le système $D \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - \dfrac{t}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

d'équations paramétriques ci-contre :

1°) Préciser les coordonnées du point A de D correspondant au paramètre $t = 0$. ……………………..

Donner sans justifier les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D. ……………………..

2°) On note E et F les points d'intersection de D respectivement avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées de D.

Le but de cette question est de calculer l'abscisse de E et l'ordonnée de F.

Le paramètre t du point E sur la droite D vérifie

l'égalité ……………………………….. .

En déduire la valeur de t correspondante. …….

Calculer alors l'abscisse de E.

$x_{\text{E}} =$ ....

Le paramètre t du point F sur la droite D vérifie

l'égalité ……………………………….. .

En déduire la valeur de t correspondante. …….

Calculer alors l'ordonnée de F.

$y_{\text{F}} =$ ....

3°) Déterminer une équation cartésienne de D. ……………………………………

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Factoriser « au maximum » le polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 6$ puis le polynôme $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

…………………………………………… ……………………………………………

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Rappeler l'expression de $f'(x)$ pour x réel strictement positif quelconque.
On écrira le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad \text{……………………}$$

2°) On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
Calculer le coefficient directeur de T.

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On donnera le résultat sous forme simplifiée.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………..

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………..

2°) On considère h la composée de f suivie de g.

On rappelle que h se note $g \circ f$.

Calculer $h(x)$ pour x réel quelconque.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{x^3+m}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Dans cette question, on suppose que $m = 0$.

Calculer $f_0'(x)$ pour x réel quelconque.

Quel est le sens de variation de f_0 sur $\mathbb{R}$?

Répondre par des phrases en rédigeant soigneusement.

……………………………………………………………. ………………………………………………………………

……………………………………………………………. ………………………………………………………………

……………………………………………………………. ………………………………………………………………

……………………………………………………………. ………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on suppose que m est un réel quelconque.

Calculer $f_m'(x)$ pour x réel quelconque. ………..…………… (une seule égalité)

Pour quelle valeur de m la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse – 1 est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? …………… (une seule égalité)

VI. (2 points)

………….……………………………………

On considère les fonctions $\text{F} : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{2(x-1)^2}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$ ………….……………………………………

définies sur l'intervalle $I = \left]1\,;+\infty\right[$.

Démontrer que F est une primitive de f sur I. ………….……………………………………

Présenter les calculs sur les lignes ci-contre et rédiger une phrase de conclusion sur la ligne ci-dessous :

……

Corrigé de la version de rattrapage

III.

3°)

$$y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y = 1\times(x-1)+0$$
$$y = x-1$$

IV.

1°)

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Les expressions $\sqrt{x^2+1}$ et $\sqrt{x^2+3}$ ne peuvent pas être transformées et doivent être laissées telles quelles.

2°)

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad h(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+3}$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad h(x)=\sqrt{x^2+4}$$

V.)

1°)

$$f_0'(x)=\frac{3x^2\times(x^2+1)-x^3\times 2x}{(x^2+1)^2} \qquad \text{(formule de dérivation d'un quotient)}$$
$$=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$