T exp

Interrogation écrite du jeudi 22 septembre 2022 (50 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - x\sqrt{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1°) Donner sans justifier un nombre irrationnel x tel que $f(x)$ soit un entier négatif.
2°) Soit x un nombre rationnel non nul. Quelle est la nature de $f(x)$? Répondre par une phrase sans justifier.
3°) Soit x un entier relatif. Quelle est la nature de $g(x)$? Répondre par une phrase sans justifier.

1°) ……….. (une seule égalité sans justifier)

2°) ……………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………

II. (1 point)

Soit n un entier naturel fixé. On pose $E = \{x \in \mathbb{Z} / -n \leqslant x \leqslant n\}$.
On rappelle que E peut aussi être noté $[\![-n\,;n]\!]$.

Compléter l'égalité : $\text{card } E =$ ....

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère l'ensemble $E = \{3k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

1°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient : 100 ..... E -100 ..... E 1111 ..... E

2°) Quel est le plus grand élément de E inférieur ou égal à 2022 ? …….. (une seule réponse sans égalité)

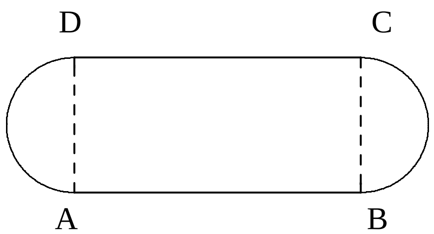
3°) Écrire en extension
- le sous-ensemble F de E constitué des éléments qui sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 13 ;
- le sous-ensemble G de E constitué des éléments qui sont des entiers négatifs supérieurs ou égaux à – 13.

……………………………………… (une seule égalité) ……………………………………… (une seule égalité)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………

IV. (1 point)

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle. On a tracé deux demi-cercles de diamètres respectifs $[\text{BC}]$ et $[\text{AD}]$.



On considère le domaine du plan limité par les segments $[\text{AB}]$ et $[\text{CD}]$ ainsi que par les deux demi-cercles.
On pose $\text{AB} = a$ et $\text{AD} = b$ où a et b sont deux réels strictement positifs.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine.
Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a et b.

……………………….. (une seule égalité)

Si a et b sont des nombres rationnels, quelle est la nature de $\mathcal{A}$?
Répondre sans justifier.

……..

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$.

1°) Donner sans justifier les coordonnées d'un point A de $\mathcal{C}$ autre que O dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

…………..

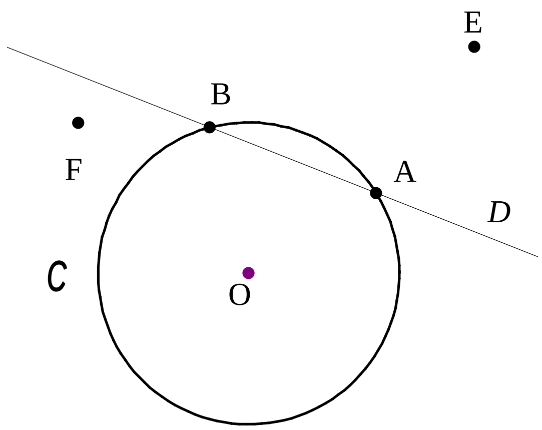
2°) Donner sans justifier les coordonnées d'un point B de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est un entier et dont l'ordonnée est un nombre décimal non entier.

…………..

VI. (2 points)

Sur la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, D est une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points A et B, E et F sont deux points tels que la droite (EF) ne coupe pas $\mathcal{C}$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

Recopier et compléter les égalités d'ensembles ci-dessous :
$\mathcal{C} \cap D = \ldots\ldots..$; $\mathcal{C} \cap (\text{EF}) = \ldots\ldots..$.



Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

VI. suite (2 points)

………..

VII. (1 point)

On pose $x = 5,021\underline{21}\ldots$

Déterminer l'écriture fractionnaire de *x*.
Donner le résultat en fraction irréductible.

…………… (une seule égalité)

VIII. (2 points)

Danc chaque case, compléter par le quantificateur $\forall$ ou $\exists$ afin d'obtenir une proposition qui soit vraie.

…. $x \in \mathbb{R}$ $\cos x + \sin x = 1$	…. $x \in \mathbb{R}$ $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$
…. $x \in \mathbb{R}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	…. $x \in \mathbb{R}$ $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

IX. (1 point)

On pose $x = \overline{2022}^{(\text{trois})}$.

Déterminer l'écriture en base dix de *x*.

…………………...….. (une seule égalité)

X. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cet exercice, on appelle *poids* d'un entier naturel *n* la somme des chiffres de son écriture en base dix.
Par exemple, 27 est de poids 9.

1°) Quel est le plus grand entier naturel qui s'écrit avec deux chiffres en base dix de poids 11 ? …....

2°) Est-il exact de dire que « plus un entier naturel a de chiffres dans son écriture en base dix, plus son poids est élevé » ? Répondre par oui ou non sans justifier.

…...

Bonus sur 1 point :

Quel est le plus petit entier naturel de poids 2022 ? …………………………………………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 22-9-2022

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - x\sqrt{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1°) Donner sans justifier un nombre irrationnel x tel que $f(x)$ soit un entier négatif.

2°) Soit x un nombre rationnel non nul. Quelle est la nature de $f(x)$? Répondre par une phrase sans justifier.

3°) Soit x un entier relatif. Quelle est la nature de $g(x)$? Répondre par une phrase sans justifier.

1°) $x = \sqrt{2}$ (une seule égalité sans justifier)

On peut aussi prendre $x = 3\sqrt{2}$, $x = 4\sqrt{2}$ etc.

On ne peut en revanche pas prendre π. En effet, on peut démontrer que le nombre $\pi\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2°) $f(x)$ est un nombre irrationnel.

3°) $g(x)$ est un entier relatif.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= f(x) \times f(-x) \\ &= \left(1 - x\sqrt{2}\right) \times \left(1 + x\sqrt{2}\right) \\ &= 1^2 - \left(x\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 1 - 2x^2\end{aligned}$$

II.

Soit n un entier naturel fixé. On pose $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -n \leqslant x \leqslant n\}$.

On rappelle que E peut aussi être noté $[\![-n\,;n]\!]$.

Compléter l'égalité : card $E = 2n + 1$

card $E = n - (-n) + 1 = 2n + 1$

On utilise la propriété :

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$. On a $\text{card}\left([\![a\,;b]\!]\right) = b - a + 1$.

III.

On considère l'ensemble $E=\{3k+1,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

1°) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient : $100\in E$ $-100\notin E$ $1111\in E$

On utilise l'équivalence : $x\in E \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \quad x=3k+1$.

On cherche chaque fois si le nombre proposé peut s'écrire sous la forme $3k+1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Pour 100, on cherche s'il existe un entier relatif *k* tel $3k+1=100 \quad (1)$.
Pour – 100, on cherche s'il existe un entier relatif *k* tel $3k+1=-100 \quad (2)$.
Pour 1111, on cherche s'il existe un entier relatif *k* tel $3k+1=1111 \quad (3)$.

$(1) \Leftrightarrow 3k=99$ $\Leftrightarrow k=33$	$(2) \Leftrightarrow 3k=-101$ (impossible pour $k\in\mathbb{Z}$)	$(3) \Leftrightarrow 3k=1110$ $\Leftrightarrow k=370$

2°) Quel est le plus grand élément de *E* inférieur ou égal à 2022 ? 2020 (une seule réponse sans égalité)

On cherche le plus grand entier relatif *k* tel que $3k+1\leqslant 2022$.

Cette inégalité est équivalente à $k\leqslant\dfrac{2021}{3}$.

$\dfrac{2021}{3}=673,66\underline{6}...$

Le plus grand entier relatif *k* tel que $3k+1\leqslant 2022$ est donc 673.

On a $3\times 673+1=2020$

3°) Écrire en extension

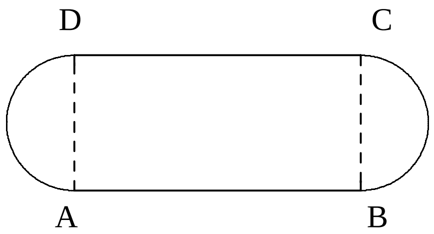
- le sous-ensemble *F* de *E* constitué des éléments qui sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 13 ;
- le sous-ensemble *G* de *E* constitué des éléments qui sont des entiers négatifs supérieurs ou égaux à – 13.

$F=\{1,4,7,10,13\}$ (une seule égalité) $G=\{-11,-8,-5,-2\}$ (une seule égalité)

On utilise des accolades.

IV.

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle. On a tracé deux demi-cercles de diamètres respectifs $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{AD}]$.



On considère le domaine du plan limité par les segments $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ ainsi que par les deux demi-cercles.
On pose $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AD} = b$ où a et b sont deux réels strictement positifs.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine.
Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a et b.

$$\mathcal{A} = ab + \frac{\pi b^2}{4} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On a $\mathcal{A} = \text{aire du rectangle ABCD} + \text{aire des 2 demi-disques}$.

Or la somme des aires des 2 demi-disques est égale à l'aire d'un disque de rayon $\dfrac{b}{2}$.

On a donc $\mathcal{A} = ab + \pi\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ ce qui donne $\mathcal{A} = ab + \dfrac{\pi b^2}{4}$.

Si a et b sont des nombres rationnels, quelle est la nature de $\mathcal{A}$?
Répondre sans justifier.
$\mathcal{A}$ est un nombre irrationnel.

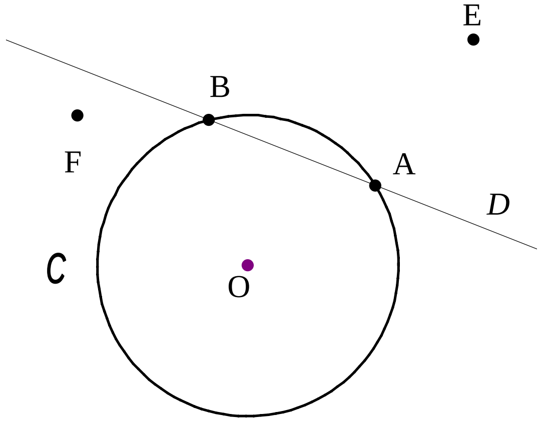
V.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$.

1°) Donner sans justifier les coordonnées d'un point A de $\mathcal{C}$ autre que O dont les coordonnées sont des entiers relatifs. $(2\,;1)$

2°) Donner sans justifier les coordonnées d'un point B de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est un entier et dont l'ordonnée est un nombre décimal non entier. $\left(1\,;\dfrac{1}{4}\right)$

VI.



Sur la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, D est une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points A et B, E et F sont deux points tels que la droite (EF) ne coupe pas $\mathcal{C}$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

Recopier et compléter les égalités d'ensembles ci-dessous :
$\mathcal{C} \cap D = \ldots\ldots\ldots$; $\mathcal{C} \cap (\mathrm{EF}) = \ldots\ldots\ldots$.

$\mathcal{C} \cap D = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$; $\mathcal{C} \cap (\mathrm{EF}) = \varnothing$

Les accolades sont obligatoires.

Attention, les parenthèses utilisées pour (EF) servent à noter la droite passant par les points E et F.
Il ne s'agit pas d'un couple.

VII.

On pose $x = 5{,}02\underline{21}...$.
Déterminer l'écriture fractionnaire de x.
Donner le résultat en fraction irréductible.

$$\frac{1657}{330} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On multiplie x par 10.
On a $10x = 50{,}21\underline{21}...$.
On effectue ensuite le produit par 100.

On aurait pu multiplier tout de suite x par 1000 : $1000x = 5021{,}\underline{21}...$.
$1000x - 10x = 5021 - 50$ soit $990x = 4971$ d'où $x = \dfrac{4971}{990}$.
On peut ensuite simplifier par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction.

On obtient $x = \dfrac{1657}{330}$.

Il s'agit d'une fraction irréductible.

VIII.

Danc chaque case, compléter par le quantificateur $\forall$ ou $\exists$ afin d'obtenir une proposition qui soit vraie.

$\exists x \in \mathbb{R} \quad \cos x + \sin x = 1$	$\exists x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 1$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\exists x \in \mathbb{R} \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 1$

$\exists x \in \mathbb{R} \quad \cos x + \sin x = 1$ On peut prendre $x = 0$.	$\exists x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 1$ On peut prendre $x = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ C'est la relation fondamentale de la trigonométrie.	$\exists x \in \mathbb{R} \quad \sin^2 x - \cos^2 x = 1$ On peut prendre $x = \dfrac{\pi}{2}$.

IX.

On pose $x = \overline{2022}^{\text{(trois)}}$.
Déterminer l'écriture en base dix de x.

$$x = \overline{62}^{\text{(dix)}} \quad \text{(une seule égalité)}$$

$x = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0$ (décomposition en base trois)

$= 2 \times 27 + 6 + 2$

$= 62$

X.

Dans cet exercice, on appelle *poids* d'un entier naturel n la somme des chiffres de son écriture en base dix.
Par exemple, 27 est de poids 9.

1°) Quel est le plus grand entier naturel qui s'écrit avec deux chiffres en base dix de poids 11 ? 92

2°) Est-il exact de dire que « plus un entier naturel a de chiffres dans son écriture en base dix, plus son poids est élevé » ? Répondre par oui ou non sans justifier.

non

Bonus sur 1 point :

Quel est le plus petit entier naturel de poids 2022 ? $6\underbrace{999.....9}_{}$

224 fois
le chiffre 9

On essaie d'utiliser le plus possible de chiffre 9 : $2022 = 9 \times 224 + 6$.