T spécialité

Interrogation écrite
Vendredi 23 septembre 2022 (30 minutes)

Numéro : ….. **Prénom et nom :** …………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 2x + \left(y+3\right)^2 = 3$.
Compléter les deux lignes en pointillés dans la chaîne d'équivalences permettant de démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle.
Rédiger une phrase de réponse sur la dernière ligne en donnant les coordonnées de son centre Ω et son rayon.

Soit M un point quelconque de *P* de coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$.

$\text{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2 - 2x + \left(y+3\right)^2 = 3$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………….

$\Leftrightarrow$ ………………………………………….

……..

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère le polynôme $P\left(x\right) = \left(x-1\right)^n \times \left(x+1\right)^n$ ou *n* est un entier naturel quelconque.

1°) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Déterminer l'expression développée réduite de $P\left(x\right)$.

……………………………………………………….

……………………………………………………….

……………………………………………………….

2°) Dans cette question, *n* est quelconque. Calculer $P\left(\sqrt{2}\right)$.

……………………………………………………….

……………………………………………………….

……………………………………………………….

III. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\text{A}\left(-3\,;\,3\right)$ et $\text{B}\left(5\,;\,2\right)$.
Répondre sur la feuille 2.
1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites $\left(\text{AB}\right)$ et $\left(\text{OA}\right)$.
2°) À l'aide de la question précédente, déterminer l'ordonnée du point C de $\left(\text{AB}\right)$ d'abscisse 1.

Numéro : …..

Prénom et nom : …………………………………………

III. 1°) 2°) ………… (une seule égalité)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

À tout réel *m* on associe le polynôme $P_m(x)=x^4-5x^2-mx+4$ de variable $x\in\mathbb{R}$.

1°) Calculer $P_m(2)$ en fonction de *m*. ……………………………………

……………………………………

……………………………………

Pour quelle valeur de *m*, 2 est-il une racine de $P_m(x)$? ………….. (une seule égalité)

2°) Dans cette question, on prend $m=0$. On a alors $P_0(x)=x^4-5x^2+4$.

Le but de la question est de déterminer les racines de $P_0(x)$ dans $\mathbb{R}$. On doit donc résoudre l'équation $P_0(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire $x^4-5x^2+4=0 \quad (1)$.

On utilise le changement d'inconnue $X=x^2$.

(1) s'écrit alors ……………………………… $(1')$.

Les racines de $(1')$ sont ………… .

Or $X=x^2$.

On reprend la résolution de (1)

$(1) \Leftrightarrow$ …………………………………

$\Leftrightarrow$ …………………………………

On en déduit que les racines de $P_0(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont ……………………………………………… .

3°) Dans cette question, on prend $m=1$. On a alors $P_1(x)=x^4-5x^2-x+4$.

On admet que $P_1(x)$ admet quatre racines dans $\mathbb{R}$ que l'on notera x_1, x_2, x_3, x_4 avec $x_1<x_2<x_3<x_4$.

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies au millième de x_1, x_2, x_3, x_4.

Compléter directement les cases ci-dessous dans l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4.

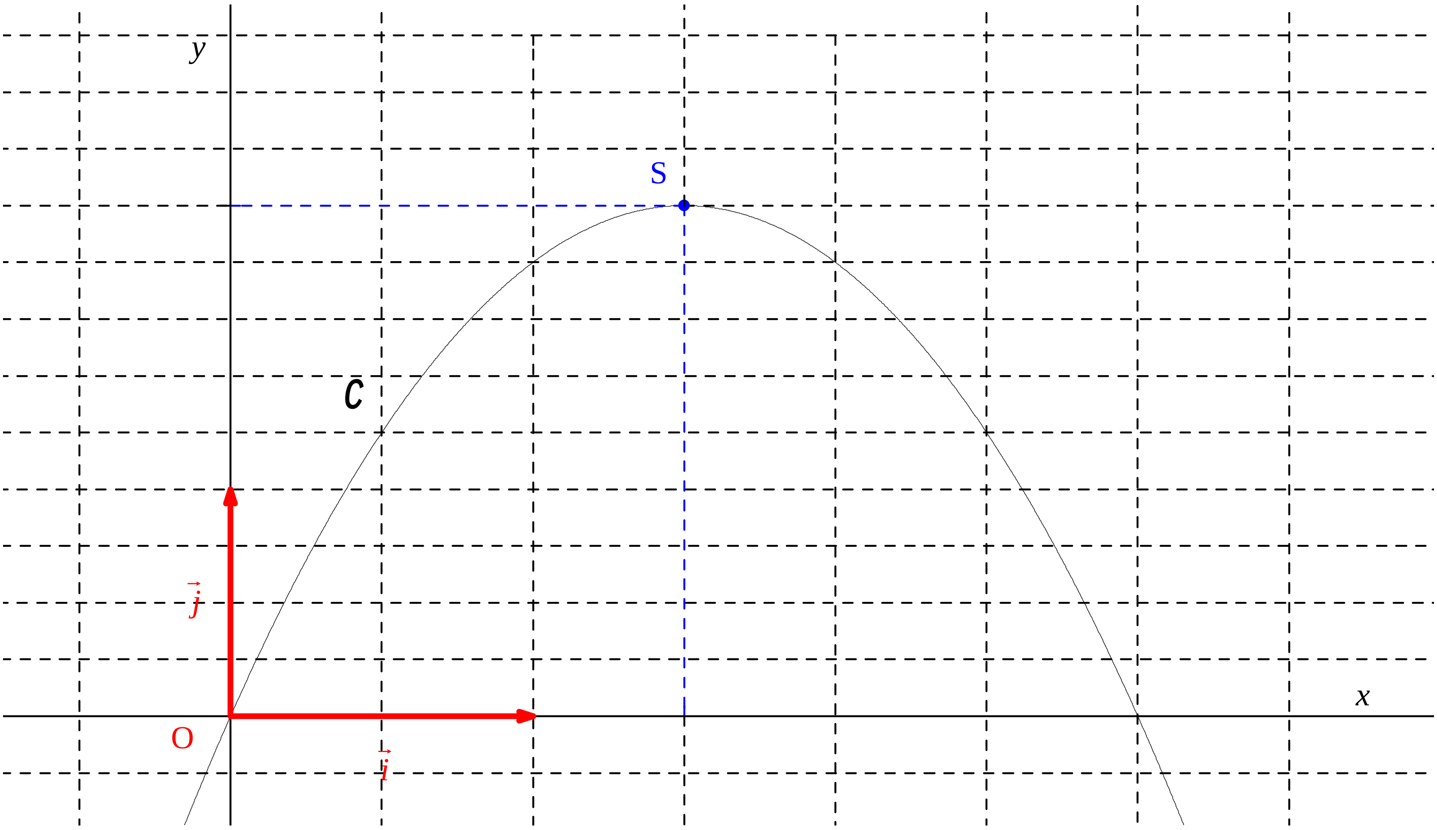
…………………	…………………	…………………	…………………

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 3x - x^2$.

Les deux questions sont indépendantes.



1°) Tracer sur le graphique la parabole Γ d'équation $y = x^2$.

Hachurer sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $x^2 \leqslant y \leqslant 3x - x^2$.

2°) On note D la droite d'équation $y = mx$ où m est un réel.

Compléter la phrase ci-dessous :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation ……………………… (1).

Résoudre (1) sur les lignes ci-dessous. On présentera en chaîne d'équivalences.

………………………………………..

………………………………………..

………………………………………..

………………………………………..

Corrigé de l'interrogation écrite du 23-9-2022

I.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 2x + \left(y+3\right)^2 = 3$.
Compléter les deux lignes en pointillés dans la chaîne d'équivalences permettant de démontrer que $\mathcal{C}$ est un cercle.
Rédiger une phrase de réponse sur la dernière ligne en donnant les coordonnées de son centre Ω et son rayon.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\left(x\,;\,y\right)$.

$$\begin{aligned}\text{M} \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow x^2 - 2x + \left(y+3\right)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 - 1 + \left(y+3\right)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 4\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(1\,;-3\right)$ et de rayon 2.

II.

On considère le polynôme $P\left(x\right) = \left(x-1\right)^n \times \left(x+1\right)^n$ ou n est un entier naturel quelconque.

1°) Dans cette question, on suppose que $n = 2$.
Déterminer l'expression développée réduite de $P\left(x\right)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad P\left(x\right) &= \left(x-1\right)^2 \times \left(x+1\right)^2 \\ &= \left[\left(x-1\right)\times\left(x+1\right)\right]^2 \\ &= \left(x^2-1\right)^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1\end{aligned}$$

On utilise l'astuce consistant à remplacer x par π pour vérifier le calcul avec la calculatrice.

2°) Dans cette question, n est quelconque. Calculer $P\left(\sqrt{2}\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{2}-1\right)^n \times \left(\sqrt{2}+1\right)^n \\ &= \left[\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^n \\ &= \left(\sqrt{2}^2 - 1\right)^n \\ &= \left(2-1\right)^n \\ &= 1^n \\ &= 1\end{aligned}$$

III.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\text{A}\left(-3\,;3\right)$ et $\text{B}\left(5\,;2\right)$.

Répondre sur la feuille 2.

1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (OA).

2°) À l'aide de la question précédente, déterminer l'ordonnée du point C de (AB) d'abscisse 1.

1°) (AB) $\begin{cases} x=-3+8t \\ y=3-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\quad$ (OA) $\begin{cases} x=-3t \\ y=3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\quad$ [ou (OA) $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=3+t\times 3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$]

On peut appliquer directement le résultat du cours ou refaire toute la démarche.

> Soit $\text{A}\left(x_{\text{A}}\,;y_{\text{A}}\right)$ un point et $\vec{u}\,(\alpha\,;\beta)$ un vecteur non nul.
> Un système d'équations paramétriques de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit
> $\begin{cases} x=x_{\text{A}}+t\alpha \\ y=y_{\text{A}}+t\beta \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Un point $\text{M}(x\,;y)$ du plan appartient à la droite D si, et seulement si, il existe un réel t tel que les coordonnées x et y de M vérifient le système. Dans ce cas, t est le réel tel que $\overrightarrow{\text{AM}}=t\vec{u}$.

$\overrightarrow{\text{AB}}\left|\begin{array}{l} 8 \\ -1 \end{array}\right.$ donc un système d'équations paramétriques de la droite (AB) s'écrit $\begin{cases} x=-3+8t \\ y=3-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En prenant le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$, la propriété fournit en effet le système $\begin{cases} x=-3+t\times 8 \\ y=3+t\times(-1) \end{cases}$.

Ce système est donné par rapport au repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ de la droite (AB).

$\overrightarrow{\text{OA}}\left|\begin{array}{l} -3 \\ 3 \end{array}\right.$ donc un système d'équations paramétriques de la droite (OA) s'écrit $\begin{cases} x=-3t \\ y=3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En prenant le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$, la propriété fournit en effet le système $\begin{cases} x=0+t\times(-3) \\ y=0+t\times 3 \end{cases}$.

Ce système est donné par rapport au repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$ de la droite (OA).

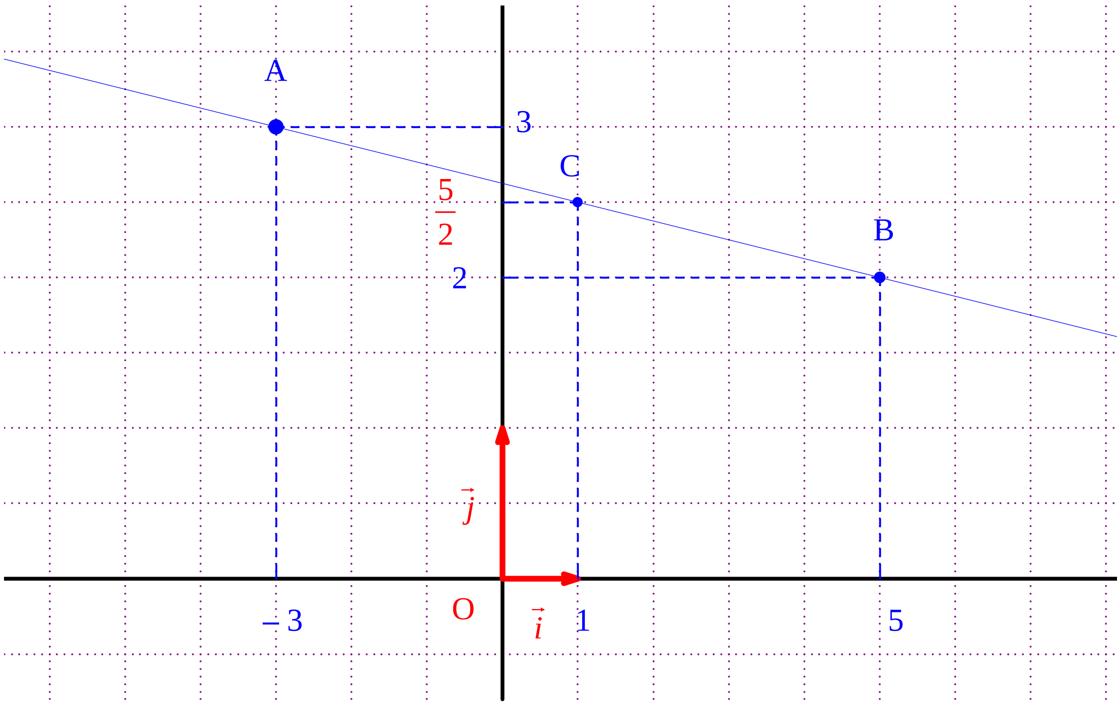
La propriété fournit en effet avec le point O le système $\begin{cases} x=0-3t \\ y=0+t\times 3 \end{cases}$ (sachant que le point O étant l'origine du repère a pour coordonnées $(0\,;0)$).

La propriété fournit avec le point A le système $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=3+t\times 3 \end{cases}$ (sachant que le point A a pour coordonnées $(-3\,;3)$).

2°) On travaille avec le système d'équations paramétriques de la droite (AB) établi à la question précédente. Il est inutile (et plus long) de repasser par une équation cartésienne de (AB).

On sait que $x_{\mathrm{C}}=1$.
Le paramètre t associé à C sur la droite (AB) (pour le système d'équations paramétriques établi à la question précédente) vérifie donc l'égalité $-3+8t=1$ ce qui donne immédiatement $t=\dfrac{1}{2}$.

On a donc $y_{\mathrm{C}}=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.
On peut vérifier sur un graphique.



IV.

À tout réel m on associe le polynôme $P_m(x)=x^4-5x^2-mx+4$ de variable $x\in\mathbb{R}$.

1°) Calculer $P_m(2)$ en fonction de m.

$$\begin{aligned}P_m(2)&=2^4-5\times 2^2-m\times 2+4\\&=16-20-m\times 2+4\\&=-2m\end{aligned}$$

Pour quelle valeur de m, 2 est-il une racine de $P_m(x)$? $\quad m=0$ (une seule égalité)

On résout l'équation $-2m=0$. La résolution est immédiate.

2°) Dans cette question, on prend $m=0$. On a alors $P_0(x)=x^4-5x^2+4$.
Le but de la question est de déterminer les racines de $P_0(x)$ dans $\mathbb{R}$. On doit donc résoudre l'équation $P_0(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire $x^4-5x^2+4=0 \quad (1)$.
On utilise le changement d'inconnue $X=x^2$.

(1) s'écrit alors $X^2 - 5X + 4 = 0 \quad (1')$.

Les racines de $(1')$ sont 1 et 4.

La racine 1 est évidente. On trouve la racine 4 en utilisant la formule de la somme ou la formule du produit des racines d'une équation du second degré. On peut aussi passer par le discriminant.

Or $X = x^2$.
On reprend la résolution de (1)

$(1) \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

On en déduit que les racines de $P_0(x)$ dans $\mathbb{R}$ sont 1, – 1, 2 et – 2.

Il s'agit de la résolution d'une équation bicarrée. On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice.

3°) Dans cette question, on prend $m = 1$. On a alors $P_1(x) = x^4 - 5x^2 - x + 4$.
On admet que $P_1(x)$ admet quatre racines dans $\mathbb{R}$ que l'on notera x_1, x_2, x_3, x_4 avec $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies au millième de x_1, x_2, x_3, x_4.
Compléter directement les cases ci-dessous dans l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4.

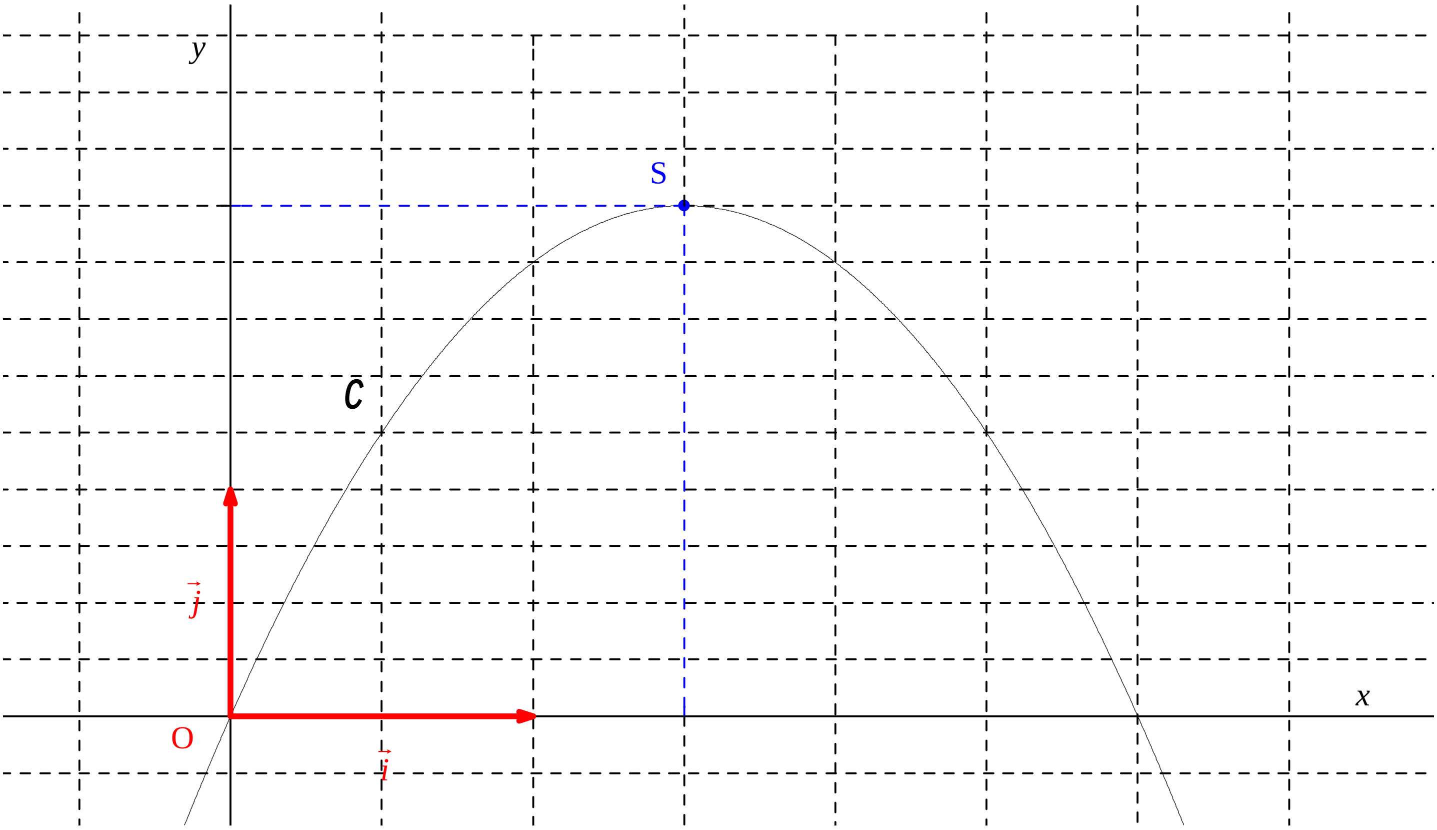
– 1,784	– 1,218	0,858	2,143

La calculatrice Numworks fournit l'affichage :

x_1	– 1,783997
x_2	– 1,21831
x_3	0,858442
x_4	2,143864

V.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 3x - x^2$.
Les deux questions sont indépendantes.



1°) Tracer sur le graphique la parabole Γ d'équation $y = x^2$.
Hachurer sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x^2 \leqslant y \leqslant 3x - x^2$.

On sait que Γ est une parabole de sommet O admettant l'axe des ordonnées pour axe de symétrie puisque le repère est orthogonal.

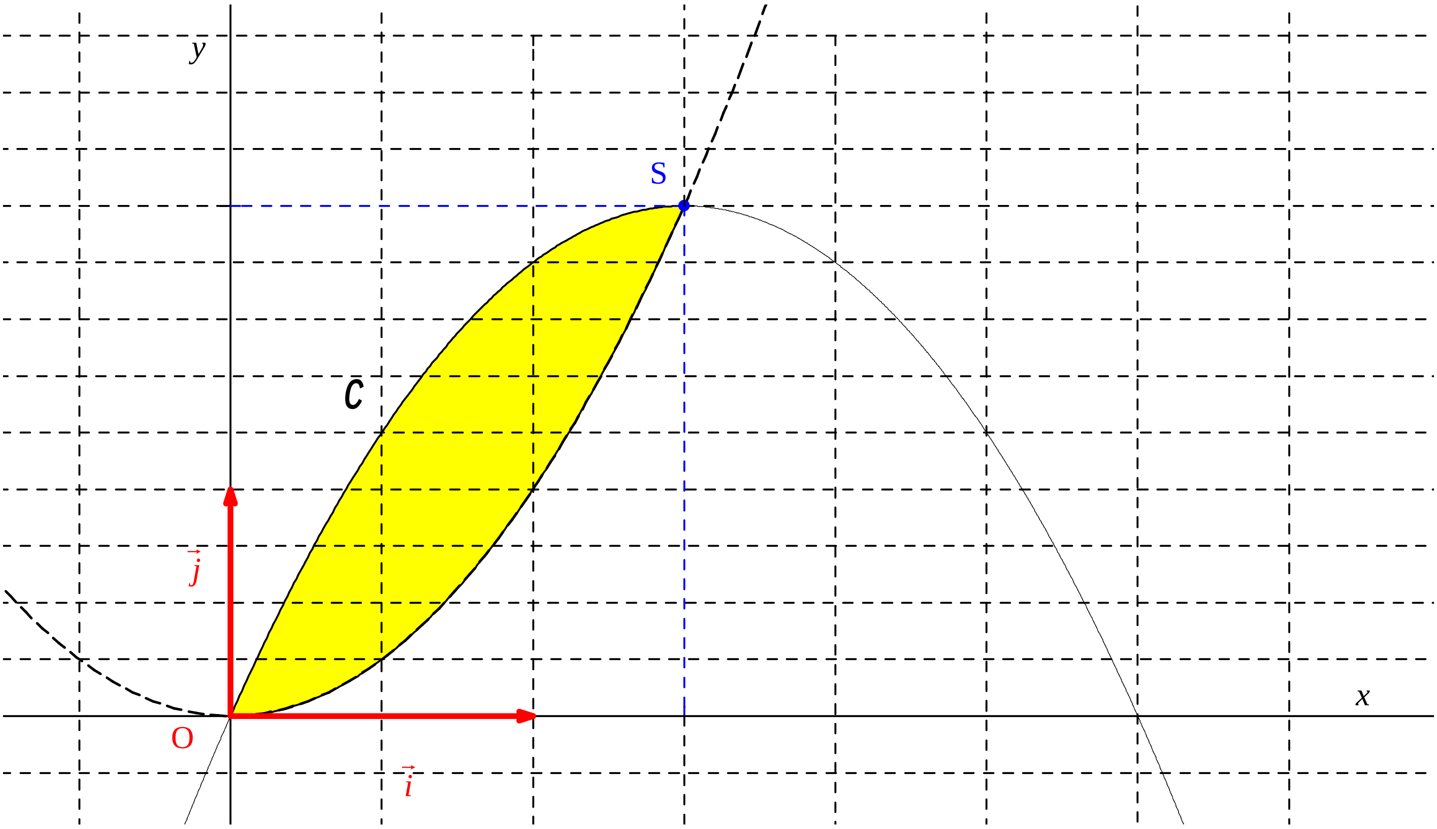
On place les points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 1.

Ces points ont pour ordonnées respectives $\frac{1}{4}$ et 1.

On place également le point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ par symétrie.

On observe que Γ passe par le sommet S de $\mathcal{C}$ car $x_C = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = y_C$.

On joint les points à main levée le plus harmonieusement possible.



La zone à hachurer est celle comprise entre $\mathcal{C}$ et Γ (points en dessous de $\mathcal{C}$ et au-dessus de Γ).

2°) On note D la droite d'équation $y = mx$ où m est un réel.

Compléter la phrase ci-dessous :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $3x - x^2 = mx \quad (1)$.

Résoudre (1) sur les lignes ci-dessous. On présentera en chaîne d'équivalences.

$(1) \Leftrightarrow 3x - x^2 - mx = 0$

$\Leftrightarrow (3-m)x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x\left[(3-m) - x\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (3-m) - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 - m$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).