T exp

Interrogation écrite du lundi 16 mai 2022 (30 minutes)

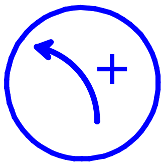
- fiche
- calculatrice

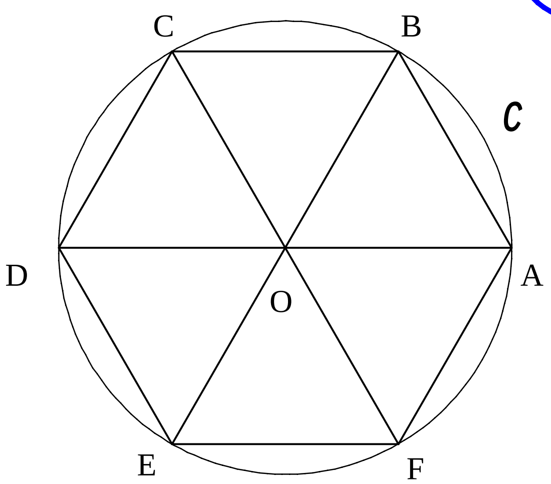
Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………..……………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un hexagone régulier ABCDEF direct inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.





Déterminer une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)$, $\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{OA}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)= \quad (2\pi)$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OD}\right)= \quad (2\pi)$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{OA}\right)= \quad (2\pi)$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)= \quad (2\pi)$

On rappelle que $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans cet ordre.

On rappelle qu'il s'agit de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OD)$ et $[OE)$ dans cet ordre.

II. (3 points)

Compléter les égalités suivantes où z et z' sont deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{5}$.

$\arg(zz')= \quad (2\pi)$ $\qquad$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)= \quad (2\pi)$ $\qquad$ $\arg\left(\overline{z}\right)= \quad (2\pi)$

III. (1 point)

Soit r un réel quelconque strictement positif et θ un réel quelconque. On pose $z = r\left(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta\right)$.

Déterminer une écriture exponentielle de z.

………….. (une seule égalité)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On pose $z = \mathrm{i}\sqrt{3} - 1$.

1°) Déterminer sans justifier une écriture exponentielle de z. …………….. (une seule égalité)

2°) Démontrer en utilisant le résultat de la question précédente que z^{2022} est un réel strictement positif.

…………………………………………………..……………………………………………………………….

…………………………………………………..……………………………………………………………….

…………………………………………………..……………………………………………………………….

V. (2 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe 2i.

Donner une équation paramétrique complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3. …………………………..

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.

$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

Soit θ un réel quelconque.
Calculer $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ en fonction de θ sous la forme la plus simple possible.
En déduire que $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ est un réel de l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$.

…………………………………………………..……………………………………………………………….

…………………………………………………..……………………………………………………………….

…………………………………………………..……………………………………………………………….

…………………………………………………..……………………………………………………………….

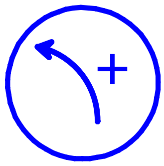
…………………………………………………..……………………………………………………………….

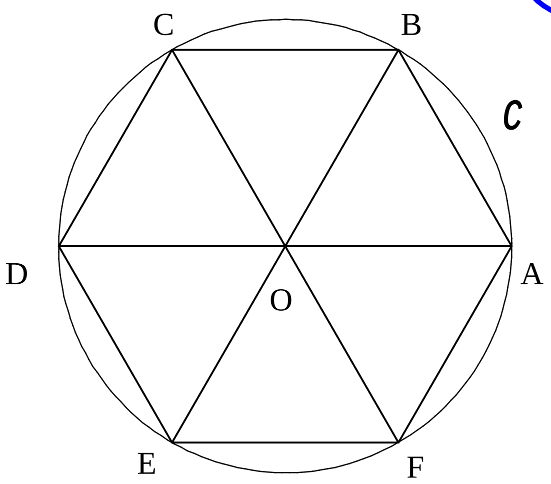
…………………………………………………..……………………………………………………………….

Corrigé de l'interrogation écrite du 16-5-2022

I.

Dans le plan orienté, on considère un hexagone régulier ABCDEF direct inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.





Déterminer une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)$, $\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OD}\right)$, $\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{OA}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$.

$\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ $\quad$ $\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OD}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ $\quad$ $\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ $\quad$ $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)=\pi\ (2\pi)$

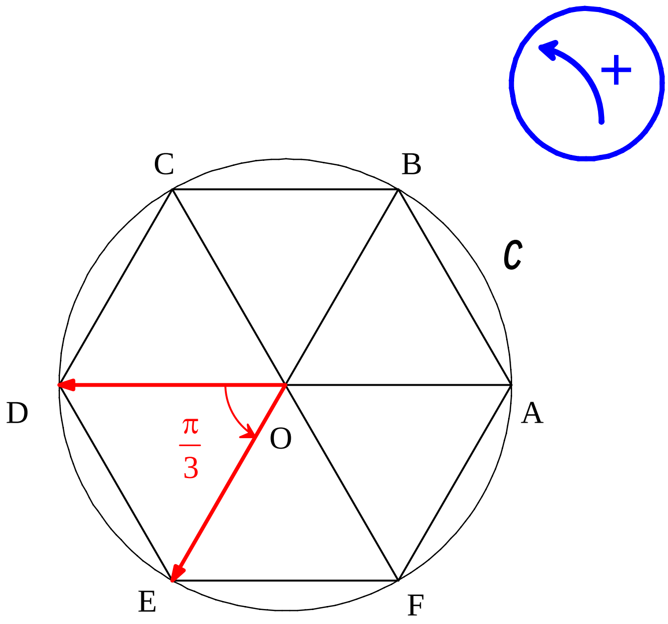
$\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OD}\right)=\dfrac{4\pi}{3}\ (2\pi)$

On rappelle que $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans cet ordre.

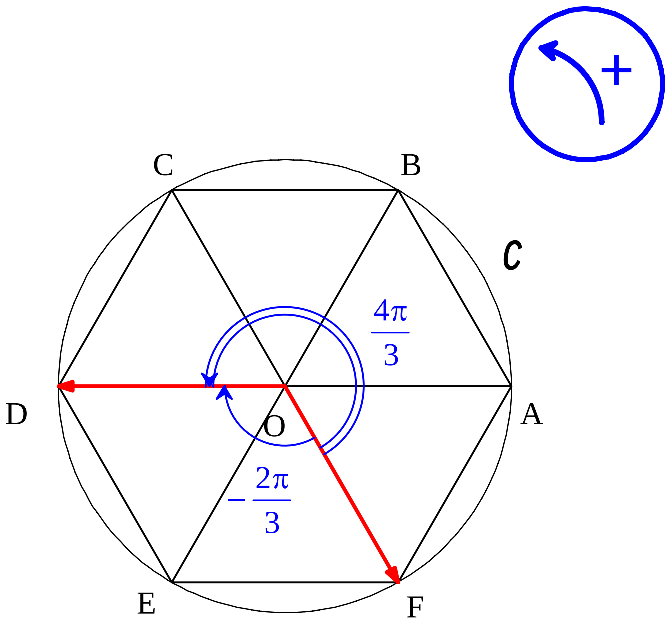
On rappelle qu'il s'agit de l'angle orienté formé par les demi-droites $[OD)$ et $[OE)$ dans cet ordre.

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OAF sont équilatéraux.

Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$, $\widehat{FOA}$ (angles au centre) ont donc tous la même mesure : $\dfrac{\pi}{3}$.



Sur la figure, on utilise le codage habituel d'un angle orienté.



$\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OA}\right)\ (2\pi)$ [on se ramène à des vecteurs ayant la même origine]

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)=\pi\ (2\pi)$ car les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraires.

II.

Compléter les égalités suivantes où z et z' sont deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{5}$.

$\arg(zz') = \frac{8\pi}{15}\ (2\pi)$ $\quad$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{15}\ (2\pi)$ $\quad$ $\arg\left(\overline{z}\right) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

On a $\arg z = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $\arg z' = \frac{\pi}{5}\ (2\pi)$.

On utilise les propriétés des arguments.

$\arg(zz') = \arg z + \arg z'\ (2\pi)$

$\arg(zz') = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\ (2\pi)$

$\arg(zz') = \frac{8\pi}{15}\ (2\pi)$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'\ (2\pi)$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\ (2\pi)$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{15}\ (2\pi)$

$\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg z\ (2\pi)$

$\arg\left(\overline{z}\right) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

III.

Soit r un réel quelconque strictement positif et θ un réel quelconque. On pose $z = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$.
Déterminer une écriture exponentielle de z.

$z = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ (une seule égalité)

1ère méthode :

On peut écrire $z = r\left[\cos(-\theta) - \mathrm{i}\sin(-\theta)\right]$ d'où le résultat.

2e méthode :

$$z = r\left(\overline{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}\right)$$

$$= r \times \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

$$= r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

IV.

On pose $z = \mathrm{i}\sqrt{3} - 1$.

1°) Déterminer sans justifier une écriture exponentielle de z. $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ (une seule égalité)

On peut vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

On peut éventuellement commencer par calculer le module de z.

$$|\,z\,| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+3}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

$z = 2\left(\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ (On met en facteur le module de z que l'on a calculé précédemment)

$= 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (On reconnaît une valeur remarquable pour le cosinus et le sinus)

On a écrit z sous forme trigonométrique faisant apparaître le module et un argument, ce qui permet d'écrire immédiatement z sous forme exponentielle.

2°) Démontrer en utilisant le résultat de la question précédente que z^{2022} est un réel strictement positif.

On utilise le résultat de la question précédente.

$$z^{2022} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2022}$$

$$= 2^{2022} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2022}$$

$$= 2^{2022} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2022\pi}{3}}$$

$$= 2^{2022} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}674\pi}$$

$$= 2^{2022} \times 1$$

$$= 2^{2022}$$

Comme $z^{2022} = 2^{2022}$, on peut affirmer que z^{2022} est un réel strictement positif.
On peut même dire que c'est un entier naturel.

V.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe 2i.

Donner une équation paramétrique complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3. $z = 2\mathrm{i} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \left(\theta \in \mathbb{R}\right)$

On peut éventuellement faire un graphique en plaçant le point A.

VI.

On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.

$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

Soit θ un réel quelconque.
Calculer $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ en fonction de θ sous la forme la plus simple possible.
En déduire que $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ est un réel de l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$.

$$f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$= 2\cos\theta \quad \text{(formule d'Euler)}$$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$.
L'égalité $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = 2\cos\theta$ montre que $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ est un réel et l'inégalité obtenue précédemment montre qu'il appartient à l'intervalle $\left[-2\,;2\right]$.