

# T spé

## Variables aléatoires réelles discrètes

Le 23-6-2023

Frédéric Junier

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un univers fini  $\Omega$  d'expérience aléatoire, qui prennent respectivement pour valeurs les réels  $x_i$  tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $y_j$  tels que  $1 \leq j \leq m$ , avec  $n$  et  $m$  entiers naturels.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tout couple  $(x_i, y_j)$  de valeurs possibles pour  $X$  et  $Y$ , on a :

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

2. Des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur une série d'épreuves indépendantes (le résultat d'une épreuve ne dépend pas des autres), sont mutuellement indépendantes si pour toute liste de valeurs  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de valeurs possibles pour la liste de variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , on a :  $P(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$

L'indépendance deux à deux de variables aléatoires n'entraîne pas leur indépendance mutuelle (pour  $n \geq 3$ ) mais dans le cadre du programme de terminale nous ne ferons pas de distinction et utiliserons parfois indépendants pour mutuellement indépendants.

La justification de l'indépendance de deux variables aléatoires et de l'indépendance mutuelle de  $n$  variables sont hors programme.

Le 23-6-2023

Cours Yvan Monka

Sur un axe gradué, on dépose une petite goûte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10. Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué. Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de  $\frac{1}{2}$  et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de  $\frac{1}{2}$ . On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au  $n$ -ième déplacement et valant  $-1$  si elle se déplace vers la gauche. On note  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  la variable aléatoire somme des  $X_i$ . 5 Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr ( & ( 1) Calculer  $P(S_n = 0)$  et  $P(S_n = 1)$  2) En déduire  $P(S_n = 0)$  et  $P(S_n = 1)$ . 3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture ? Calculer  $P(S_n = 10)$  dans ce cas.

Le 23-6-2023

Exercice surbooking trouvé en préparant le sujet d'oral avec Emma Picone

# Loi de probabilité d'une variable aléatoire Rappels et compléments

## Partie 1

### Généralités

Dans cette partie, il s'agit essentiellement de rappels des années antérieures.

#### I. Distribution de probabilité sur un ensemble fini

##### 1°) Définition

On définit une **distribution de probabilité** (ou **loi de probabilité**) sur l'ensemble des résultats  $e_1, e_2, \dots, e_n$  d'une expérience aléatoire en leur attribuant des nombres fixes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  vérifiant les deux conditions suivantes :

$$C_1 : \text{pour tout entier naturel } i \in \{1, 2, \dots, n\}, p_i \geq 0$$

$$C_2 : p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Les réels  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sont tous positifs ou nuls et leur somme est égale à 1.

On peut noter que les conditions  $C_1$  et  $C_2$  impliquent que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad 0 \leq p_i \leq 1$ .

On rappelle que l'ensemble  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  s'appelle l'univers des possibles.

##### 2°) Tableau

<b>Résultats</b>	$e_1$	$e_2$	...	$e_n$	
<b>Probabilités</b>	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	Total = 1

##### 3°) Notation

On note  $P$  la loi de probabilité.

On écrira  $P(e_1) = p_1$  (probabilité du résultat  $e_1$ ),  $P(e_2) = p_2$  (probabilité du résultat  $e_2$ )...

On dira que l'expérience aléatoire est **modélisée** par la loi de probabilité  $P$ .

##### 4°) Interprétation

$p_i$  est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que le résultat  $e_i$  a de se réaliser.

4°) Cas d'équiprobabilité – loi (distribution) uniforme

Résultats	$e_1$	$e_2$	...	$e_n$	
Probabilités	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	Total = 1

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Loi image

Ensemble des valeurs possibles prises par une variable aléatoire

Exemple avec trois boules numérotées 1, 2, 3.

On tire deux boules

On additionne les numéros

On note X la somme des numéros.

Les valeurs prises par X sont .....

# Partie 2

## Lois discrètes à connaître

I. Loi uniforme discrète

1°) Définition

On se place sur un espace probabilisé fini.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme si toutes les valeurs prises par X ont la même probabilité.

Si  $n$  désigne le nombre de valeurs que X peut prendre, la probabilité que X prenne chacune d'entre elles est égale à  $\frac{1}{n}$ .

On note  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les différentes valeurs que peut prendre X.

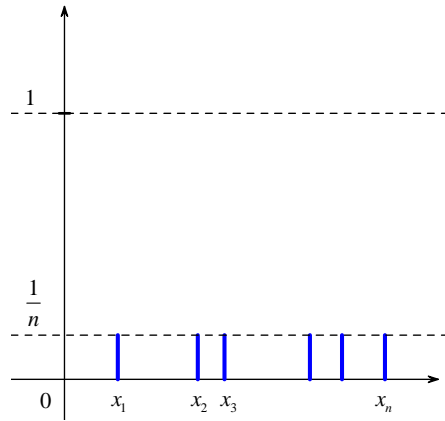
$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \dots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}$$

Valeur	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	
Probabilité que X prenne cette valeur	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	somme = 1

On dit que X suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

La loi image de X est la distribution uniforme sur l'ensemble des valeurs.



On a rangé les valeurs dans l'ordre croissant.

Il s'agit d'un cas particulier de loi discrète.

On a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} \left( x_k \times \frac{1}{n} \right) \text{ donc } E(X) = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n} ;$$

$$V(X) = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - E(X))^2}{n} .$$

On retiendra :

$E(X)$  = moyenne de la série  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
 $V(X)$  = variance de la série  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

### 2°) Exemple

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

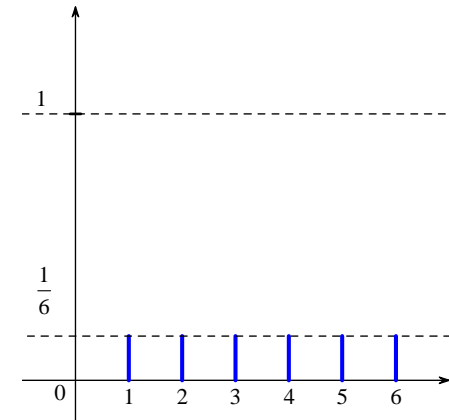
On note X le numéro de la face supérieure.

X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

X suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Cet ensemble se note aussi  $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ .

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



### 3°) Cas particulier important

#### Propriété :

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est l'intervalle d'entiers  $A = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

On suppose que X suit la loi uniforme sur A.

On a :  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

Attention, ces deux résultats ne s'appliquent que pour une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

#### Démonstration :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Exprimons l'espérance et la variance de X en fonction de  $n$  sous la forme la plus simple possible.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{k=n} \left( k \times \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \times \left( \sum_{k=1}^{k=n} k \right) \quad (\text{on « sort » le } \frac{1}{n} \text{ car } \frac{1}{n} \text{ ne dépend pas de } k ; \text{ on effectue en fait une factorisation}) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{on utilise la formule } \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}) \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Le résultat est logique.

Pour calculer la variance, on va utiliser la formule de König-Huygens. Pour cela, on va avoir besoin du calcul du moment d'ordre 2 de X.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{k=n} \left( k^2 \times \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{on utilise la formule } \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\
&= \frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \\
&= \frac{n^2 - 1}{12}
\end{aligned}$$

## Cas d'une variable qui suit la loi uniforme sur un intervalle d'entiers

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est l'intervalle d'entiers  $A = \llbracket a, b \rrbracket$  où a et b sont deux entiers relatifs tels que  $a < b$ .

On suppose que X suit la loi uniforme sur A.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{a+b}{2} \\
V(X) &= \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}
\end{aligned}$$

### Démonstration :

Exprimons l'espérance de X en fonction de a et b.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=a}^{k=b} \left( k \times \frac{1}{b-a+1} \right) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^{k=b} k \\
&= \frac{1}{b-a+1} \times \frac{(b-a+1)(a+b)}{2} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

## II. Loi de Bernoulli

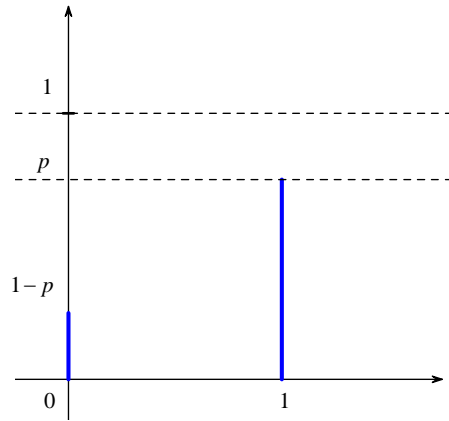
On considère une épreuve de Bernoulli telle que la probabilité d'un succès S soit égale à p où p est un réel compris entre 0 et 1.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un succès et 0 si on obtient un échec.

X peut prendre les valeurs  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$ .

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	1	0
$P(X = x_i)$	p	1-p



Calculons l'espérance mathématique et la variance de X.

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p)$$

$$= p$$

Avec la définition :

$$V(X) = (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p)$$

$$= p(1-p)^2 + p^2(1-p)$$

$$= p(1-p)(1-p+p) \text{ (on factorise par } p(1-p)\text{)}$$

$$= p(1-p) \times 1$$

$$= p(1-p)$$

On pose souvent  $q = 1-p$  ;  $q$  est la probabilité d'un échec.

On retient alors  $V(X) = pq$ .

Avec la formule de König-Huygens :

$$V(X) = 1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

### III. Loi binomiale

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \quad (k \text{ en couleur})$$

k en couleur

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres**  $n$  (nombre d'épreuves de Bernoulli) **et**  $p$  (probabilité d'un succès).

#### Exemples :

On peut donner la loi de probabilité sous forme de tableau pour de petites valeurs de  $n$ .

- $n = 1$

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$q$	$p$

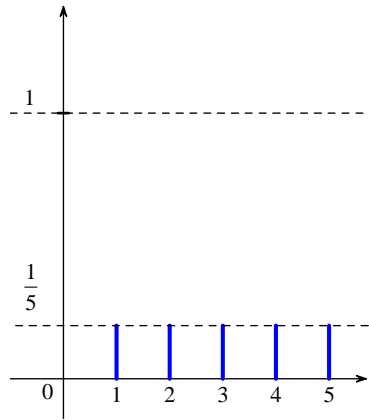
Il s'agit de la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

- $n = 2$

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$q^2$	$2pq$	$p^2$

- $n = 3$

$x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$q^3$	$3pq^2$	$3p^2q$	$p^3$



**Le 1<sup>er</sup> juin 2022**

- loi de Dirac (variable aléatoire constante qui prend une seule valeur avec la probabilité 1)
- loi uniforme (variable aléatoire qui prend plusieurs valeurs ayant toutes la même probabilité)

Représentation graphique

- loi de Bernoulli (variable aléatoire qui prend deux valeurs 0 et 1)
- loi binomiale

#### **IV. Cas particulier de loi : variable aléatoire constante**

##### **Définition :**

On appelle variable aléatoire constante une variable aléatoire qui ne prend qu'une seule valeur.

Il s'agit d'un cas particulier de loi uniforme.

$X$  est une variable aléatoire constante égale à  $a$ .  $\Leftrightarrow X$  prend uniquement pour valeur  $a$  (avec pour conséquence évidente, que la probabilité est égale à 1).

Autrement dit,  $X$  suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\{a\}$ .

##### **Propriété :**

Soit  $X$  une variable aléatoire constante égale à  $a$ .  
Dans ce cas, l'espérance de  $X$  vaut  $a$  et la variance vaut 0.

Il existe d'autres lois de probabilités discrètes qui seront vues plus tard dans le supérieur.

# Exercices sur loi de probabilité d'une variable aléatoire définie sur un univers fini

**1**) Lors d'une opération commerciale dans un magasin, chaque client obtient un numéro au hasard entre 1 et 50.

Si le numéro est pair, il gagne un bon d'achat de 5 € et si le numéro est un multiple de 4, il gagne en plus un bon d'achat de 10 €

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le gain total du client en euros.

Donner la loi de probabilité de  $X$ .

**2**) On considère un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4.

On lance le dé et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la face sur laquelle retombe le dé.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$  dans les deux cas suivants :

① La probabilité de chaque face est proportionnelle au numéro qu'elle porte ;

② La probabilité de chaque face est inversement proportionnelle au numéro qu'elle porte.

**3**) On dispose de deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6 que l'on jette successivement.

On note  $X$  le plus grand des deux numéros obtenus (si l'on obtient deux fois le même numéro,  $X$  est égal à ce numéro).

1°) Quelles sont les valeurs que peut prendre  $X$  ?

2°) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

**4**) On lance deux fois de suite un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note les numéros dans l'ordre.

On note  $X$  la somme des numéros.

1°) Quelles sont les valeurs que peut prendre  $X$  ?

2°) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

Représenter graphiquement cette loi de probabilité par un diagramme en bâtons.

**5**) On lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note la distance  $X$  entre les numéros sortis.

Par exemple, si le premier dé sort le numéro 3 et le deuxième dé sort le numéro 5, la distance entre les numéros sortis est égale à :  $X = 5 - 3 = 2$  (différence entre le plus grand numéro sorti et le plus petit ou encore valeur absolue de la différence des deux numéros).

Plus généralement, si le premier dé sort le numéro  $a$  et le deuxième dé sort le numéro  $b$ , la distance entre les numéros sortis est égale à :  $X = |a - b|$  (ou  $X = |b - a|$ ).

1°) Quelles sont les valeurs que peut prendre  $X$  ?

2°) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

**6**) On considère une urne contenant deux boules numérotées 1 et 2.

1°) On tire une première boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.

On tire une deuxième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.

On note  $X$  la somme des numéros des deux boules tirées.

Quelles sont les valeurs possibles de  $X$  ?

Établir la loi de probabilité de  $X$ .

2°) On tire une première boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.

On tire une deuxième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.

On tire une troisième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.

On note  $X$  la somme des numéros des trois boules tirées.

Quelles sont les valeurs possibles de  $X$  ?

Établir la loi de probabilité de  $X$ .

3°) Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant trois boules numérotées 1, 2, 3.

Avec 2 tirages successifs avec remise.

Avec 3 tirages successifs avec remise.

**7**) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient :

1 boule portant le numéro 1 ;

2 boules portant le numéro 2 ;

⋮

$n$  boules portant le numéro  $n$ .

1°) Quel est le nombre total de boules ?

2°) On tire une boule au hasard dans cette urne.

On note  $X$  le numéro qu'elle porte.

Soit  $k$  un entier naturel tel que  $1 \leq k \leq n$ .

Exprimer la probabilité que  $X = k$ .

## Le 12-6-2023

On pose  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2$  ( $n$  entier naturel supérieur ou égal à 1).

On tire deux éléments au hasard de  $\Omega$  et on note  $X$  leur PGCD.

Calculer l'espérance de  $X$  en fonction de  $n$  sous la forme d'une somme.

A l'aide de la calculatrice, calculer cette espérance pour  $n = 100$ .

# Solutions

1

Il gagne soit 0 euro (si le nombre est impair), soit 5 euros (le nombre est pair non multiple de 4), soit 15 euros (le nombre est un multiple de 4).

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité de X.

$x_i$	0	5	15
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{50}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{12}{50}$

2

Inversement proportionnelle signifie proportionnel à l'inverse du numéro

① La probabilité de chaque face est proportionnelle au numéro qu'elle porte.

On note  $k$  le coefficient de proportionnalité.

X peut prendre les valeurs :  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ .

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$k$	$2k$	$3k$	$4k$

On doit avoir  $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$  (1).

$$(1) \Leftrightarrow k + 2k + 3k + 4k = 1$$

$$\Leftrightarrow 10k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{10}$$

Les probabilités sont en progression arithmétique. On n'est pas dans une loi uniforme.

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

② La probabilité de chaque face est inversement proportionnelle au numéro qu'elle porte.

La phrase « la probabilité de chaque face est **inversement proportionnelle** au numéro qu'elle porte » signifie que la probabilité de chaque face est proportionnelle à l'inverse du numéro qu'elle porte.

On note  $k$  le coefficient de proportionnalité.

X peut prendre les valeurs :  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ .

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{k}{1}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{4}$

On doit avoir  $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$  (2).

$$(2) \Leftrightarrow k + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12}k = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{25k}{12} = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{12}{25}$$

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

3

L'univers des possibles est  $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ .

Le cardinal est 36.

Il y a 36 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

X peut prendre les valeurs :  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ .

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire est modélisée par une loi d'équiprobabilité  $P$ .

$x_i$	1	2	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	Total = 1

$$\text{Pour } k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket, P(X = k) = \frac{2k-1}{36}.$$

Les probabilités sont en progression arithmétique.



**Généralisation possible.**

**Exercice 3**

Il y a 36 résultats possibles (la modélisation s'effectue avec des couples (a,b), a et b étant des entiers naturels compris 1 et 6).

On utilise le cours de dénombrement : 6 x 6 (nombre de couples).

Les valeurs possibles de X sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Les couples pour 3 : (1,3), (3,1), (2,3),(3,2), (3,3).

exercice 3

Les valeurs possibles de X sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

La question figure dans l'exercice suivant.

**Exercice 3**

Calculs un peu fastidieux

On peut découvrir une loi intéressante : pas uniforme.

On observe que les probabilités forment une suite arithmétique de raison 2/36 (autrement dit 1/18).

Il serait intéressant d'établir une loi plus générale.

Loi qui ne porte pas de nom

On peut éventuellement donner une formule.

Il s'agit d'une loi symétrique.

**4 Lancers de deux dés**

X : somme des numéros sur les faces supérieures des deux dés

1°) **Déterminons les valeurs possibles de X.**

Il y a deux façons de répondre :

X peut prendre les valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12.

X peut prendre les valeurs de tous les entiers naturels de 2 à 12 (il y a 11 valeurs).

**L'ensemble es**

2°) **Déterminons la loi de probabilité de X.**

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire est modélisée par une loi d'équiprobabilité P.

On peut faire un tableau à double entrée ou un arbre.

Dans ce tableau on note la somme des numéros des deux dés pour chaque valeur.

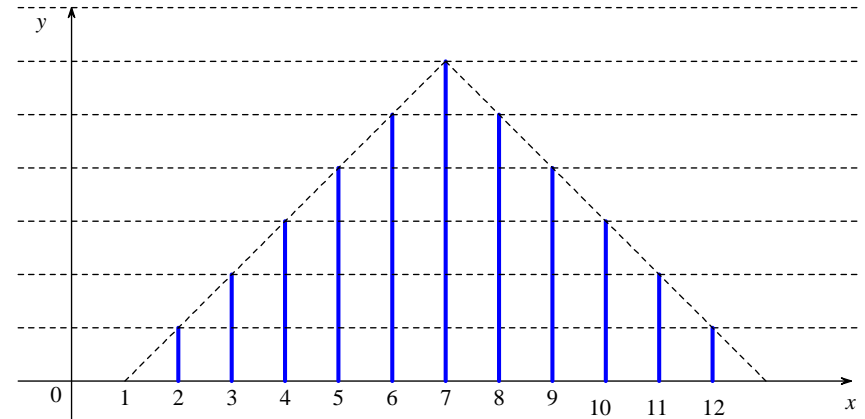
**Loi de probabilité de X :**

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	Total = 1

**Exemple pour la somme 3 :**

On peut obtenir cette somme pour deux couples de résultats : (1 ; 2) et (2 ; 1).

- La représentation graphique de cette loi de probabilité sous la forme d'un diagramme en bâtons fait apparaître une distribution « triangulaire ».
- Cette expérience aléatoire est très facile à simuler par un programme Python.



Pour  $k \in \llbracket 2 ; 7 \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \frac{k-1}{36}$ .

Pour  $k \in \llbracket 7 ; 12 \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \frac{13-k}{36}$ .

**5**

1°) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5.

2°)

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

ou

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

Ou encore

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

**Exercice 5**

Lois triangulaires  
Lois symétriques

6 On considère une urne contenant deux boules numérotées 1 et 2.  
1°) On tire une première boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.  
On tire une deuxième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.  
On note X la somme des numéros des deux boules tirées.  
Quelles sont les valeurs possibles de X ?  
Établir la loi de probabilité de X.

$x_i$	2	3	4	
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25	Total = 1

X ne suit pas une loi uniforme.

Il ne s'agit pas non plus d'une loi binomiale.

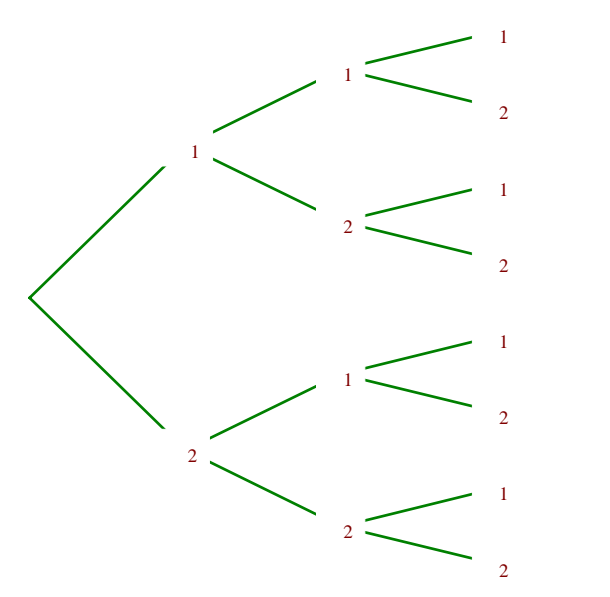
- 1) 0,25
- 2-1
- 1-2
- 2-2

2°) On tire une première boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.  
On tire une deuxième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.  
On tire une troisième boule au hasard. On note son numéro et on la remet dans l'urne.  
On note X la somme des numéros des trois boules tirées.  
Quelles sont les valeurs possibles de X ?  
Établir la loi de probabilité de X.

$x_i$	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total = 1

$x_i$	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125	Total = 1

On suppose qu'on effectue un troisième tirage.  
On effectue un arbre de probabilités.



Il s'agit d'une loi binomiale.

Reprendre les questions précédentes avec une urne contenant trois boules numérotées 1, 2, 3.  
Avec 2 tirages successifs avec remise  
Avec 3 tirages successifs avec remise

$x_i$	2	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	Total = 1

La loi de X ne porte pas de nom particulier (loi triangulaire).

$x_i$	3	4	5	6	7	8	9	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$	Total = 1

La valeur 4 s'obtient avec les tirages 1-1-2 ; 1-2-1 ; 2-1-1.  
La valeur 5 s'obtient avec les tirages 2-2-1 ; 2-1-2 ; 2-2-1 ; 1-2-2 ; 1-2-2.  
La valeur 6 s'obtient avec le tirage 2-2-2.

Il s'agit de lois triangulaires.

On peut les représenter sous forme d'un diagramme en bâtons.

3°) Reprendre les questions précédentes en notant  $X$  le produit des numéros tirés.

### 10) Loi de probabilité de $X$

On peut faire un tableau à double entrée ou un arbre.

$X$  est le plus grand des deux numéros obtenus.

On utilise un arbre de possibilités ou un tableau.

Il y a 36 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

$X$  peut prendre les valeurs :  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ .

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire est modélisée par une loi d'équiprobabilité  $P$ .

$x_i$	1	2	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	Total = 1

Exemple :

Le plus grand des deux numéros est 2 : il y a 3 résultats possibles ((1 ; 2), (2 ; 1), (2 ; 2)).

16) On lance deux dés cubiques non truqués et on note la distance  $X$  entre les numéros sortis.

Par exemple, si le premier dé sort le numéro 3 et le deuxième dé sort le numéro 5, la distance  $d$  entre les numéros sortis est égale à :  $X = 5 - 3 = 2$  (différence entre le plus grand numéro sorti et le plus petit ou encore valeur absolue de la différence des deux numéros).

Plus généralement, si le premier dé sort le numéro  $a$  et le deuxième dé sort le numéro  $b$ , la distance  $d$  entre les numéros sortis est égale à :  $X = |a - b|$  (ou  $X = |b - a|$ ).

1°) Comment simuler un lancer sur calculatrice ?

2°) Le diagramme ci-dessous indique la distribution des fréquences obtenue lors de la simulation sur des échantillons de plus en plus grands.

Quelle conjecture peut-on émettre sur leur distribution ?

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{9}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{18}$$

Exercice 7

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(X=k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Le 8 mars 2023 après 22 heures

$n$  lancers d'une pièce non truquée

On gagne si l'on obtient des piles pour au moins la moitié des lancers

Simulation estimation de la probabilité de gagner

**Le 17-3-2023**

Exercice M. Lee 2022 2023 tickets de métro

Un usager d'un réseau ferroviaire utilise des tickets l'unité a 3 euros sans les perdre puisqu'il les utilise tout de suite. S'il achetait les tickets par carnet de 10, il paierait 2 euros 50 le ticket. Cepenclant, la probabilité qu'il perde un ticket acheté en carnet vaut 0,2. Quelle est la probabilité qu'acheter un carnet de 10 soit plus intéressant qu'acheter les tickets a l'unité ?

S'il perd 4 tickets, 25 euros - tickets utilisables  
 25/6 tickets  
 $Y=25/(10-X)$

$y_i$	2,5	2,78	3,125	3,57	4,17	5	6,25	12,5	25
$P(Y=y_i)$	0,107	0,268	0,301	0,201	0,088	0,086	$5,50 \times 10^{-3}$	$7,66 \times 10^{-4}$	$7,37 \times 10^{-5}$

$E(Y)=3,20 > 3$

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants. Soit S l'évènement : « Le ticket est perdu ».

X décrit le nombre de tickets perdus parmi 10 tickets avec des probabilités de perdre un ticket identiques et indépendantes dont la probabilité de succès est 0,2.

$3(10-X) \geq 25$   
 $30-3X \geq 25$   
 $3X \leq 5$   
 $X \leq 1$

$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,2 = 2$   
 $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$   
 $= 0,8^{10} + 10 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,38$  (à 10-2)  
 $= 0,38$  (à 10-2 près)

**Le 24 7 2023**

Exercice de Louis Clément Lefèvre issu de son TD 25 à utiliser en interrogation écrite durant l'année scolaire 2023 2024

Un jeu de fléchettes se présente de la façon suivante : la cible de rayon R est divisée en  $n \in \mathbb{N}^*$  secteurs circulaires concentriques, tous de même largeur  $h = R/n$ , délimitant ainsi n zones de plus en plus éloignées du centre. Le premier secteur est donc un cercle de rayon h au centre de la cible ; et le n-ième secteur est une couronne délimitée par les cercles de rayons R - h et R . On admet que la probabilité de tomber dans un certain secteur de la cible est proportionnelle à l'aire de ce secteur ; la variable aléatoire X désigne le numéro k  $\in$

Cela me fait penser à un exercice de devoir maison pour le mardi 1<sup>er</sup> juin 2004 écrit par moi (pour les 1<sup>ère</sup> S). Dans ce devoir, il y a le problème du Gand Duc de Toscane.

Une cible de tir à l'arc est constituée de quatre zones  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  limitées par quatre cercles concentriques  $C_1, C_2, C_3, C_4$  des rayons respectifs 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm.

La zone  $Z_1$  est le disque limité par  $C_1$ , la zone  $Z_2$  est la couronne circulaire limitée par  $C_1$  et  $C_2$ , la zone  $Z_3$  est la couronne circulaire limitée par  $C_2$  et  $C_3$ , la zone  $Z_4$  est la couronne circulaire limitée par  $C_3$  et  $C_4$ . La zone  $Z_0$  est l'extérieur de  $C_4$ .

Pour tout  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , on note  $p_i$  la probabilité d'atteindre la zone  $Z_i$ .

On suppose que la probabilité d'atteindre chacune des zones  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  est proportionnelle à son aire et que  $p_4 = 0,35$ .

1°) Calculez  $p_1, p_2, p_3$ .

3°) Déduisez-en  $p_0$ .

III) Le problème du Grand Duc de Toscane

On lance trois dès non truqués. On note les numéros des faces supérieurs de chacun des trois dès.

1°) Déterminez le nombre de résultats possibles.

(Vous esquisserez un arbre)

2°) On considère les évènements :

A : « la somme des numéros est égale à 9 » ;

B : « la somme des numéros est égale à 10 »

Déterminez à l'aide d'un tableau du modèle ci-dessous le nombre de résultats possibles pour A et pour B ( deux tableaux : un pour A , un pour B ; c'est long mais il faut le faire !).

Calculez puis comparez les probabilités de A et B.

1er dé	2eme dé	3eme dé
1	3	6
1	4	5
1	5	4
1	6	3

Une cible de tir à l'arc est constituée de quatre zones  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  limitées par quatre cercles concentriques  $C_1, C_2, C_3, C_4$  des rayons respectifs 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm.

La zone  $Z_1$  est le disque limité par  $C_1$ , la zone  $Z_2$  est la couronne circulaire limitée par  $C_2$  et  $C_3$ , la zone  $Z_3$  est la couronne circulaire limitée par  $C_3$  et  $C_4$ . La zone  $Z_0$  est l'extérieur

de  $C_4$ . Pour tout  $i$  appartient  $0, 1, 2, 3, 4$ , on note  $p_i$  la probabilité d'atteindre la zone  $Z_i$

On suppose que la probabilité d'atteindre chacune des zones  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  est proportionnelle à son aire et que  $p_4 = 0,35$ .

Calculez  $P_1, P_2, P_3$

Déduisez-en  $P_0$

II. On lance deux dés non truqués.

On note les numéros des faces supérieurs de chacun des deux.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des numéros des deux dés .

1°) Faites un tableau à double entrée indiquant pour chaque lancer la somme des numéros.

2°) Déterminez la loi de probabilité de X.

DS voir à la fin

voir aussi livre Terracher TS p. 267

Au jeu de la roulette les trente-sept issues 0, 1, 2, ..., 36 sont équiprobables. Le nombre 0 est blanc ; les nombres 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36 sont rouges ; les autres sont noirs.

On considère deux façons de jouer.

1°) 1<sup>ère</sup> façon : On mise 1 € sur rouge : on gagne 1 € si un numéro « rouge » sort ; sinon, on perd sa mise.

On note X le gain algébrique en euros.

Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance (valeurs exactes).

2°) 2<sup>e</sup> façon :

On mise 1 € sur un numéro : on gagne 35 € si le numéro sort ; sinon, on perd sa mise.

On note Y le gain algébrique en euros.

Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance et sa variance (valeurs exactes).

3°) Comparer les deux façons de jouer (gain, risque...).

0		
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

## Le 29-6-2022

### Cours Lycée Jacques Decour ECG

Dans de nombreuses situations, on ne s'intéresse pas directement aux événements aléatoires eux-mêmes, mais à des grandeurs numériques qui leur sont associées : nombre de particules émises par un élément radioactif dans une direction et durant un intervalle de temps donné, valeur d'une action boursière à une date fixée, etc.

Ainsi, si l'on cherche à définir la probabilité pour que, dans une population donnée, un individu ait une taille comprise entre 1 m 74 et 1 m 76, on est amené à introduire :

\* un univers  $\Omega$  dont les éléments sont les individus,

\* une application X, qui à un individu  $\omega$ , donne sa taille, notée  $X(\omega)$  (en cm).

Autrement dit, on traite le cas où l'image de X par  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}$ .

#### 1 Variables aléatoires et lois de probabilité

##### 1.1 Cas général

###### DÉFINITION Variable aléatoire réelle

Étant donné un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on appelle variable aléatoire réelle toute application X définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}.$$

Remarque. L'expression « variable aléatoire » remonte à une époque où sa définition précise n'était pas encore connue. D'après la définition donnée ci-dessus, une « variable aléatoire » n'est ni une variable, ni aléatoire : c'est une application parfaitement définie. Par contre, c'est la réalisation  $\omega$  (et par extension  $X(\omega)$ ) qui est aléatoire.

Notation.

• Dans la suite, pour I un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on note :

$$[X \in I] =$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}, [X \leq t] =$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \text{ et } [X = t] =$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = t\}.$$

Ainsi, X est une variable aléatoire si pour tout réel t,  $[X \leq t]$  est un événement.  $P_j [X \leq t] \notin$  est donc bien défini.

• Pour une variable aléatoire X définie sur  $\Omega$ , l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire sera noté  $X(\Omega)$ .

Remarques.

• Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si X est une variable aléatoire réelle, alors  $\{X \in ]a, b]\}$  est un événement car

$$[X \leq a], [X \leq b] \in \mathcal{A} \text{ et } \{X \in ]a, b]\} = [X \leq b] \setminus [X \leq a] \in \mathcal{A}.$$

$$X \leq a \text{ et } X \leq b \iff a < X \leq b$$

a b

Par conséquent, la probabilité  $P_j \{X \in ]a, b]\}$  a bien un sens.

## Le 29-6-2022

Marielle Fritz

### Variables aléatoires réelles discrètes

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

#### 1 Loi d'une variable discrète

##### 1.1 Généralités

Maintenant que  $\Omega$  peut être de taille infinie, il faut rajouter une condition pour avoir une variable aléatoire :

#### Définition

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  si :

1.  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où I est une partie finie ou infinie de  $\mathbb{N}$ .

Autrement dit  $X(\Omega)$  est un ensemble fini ou dénombrable.

2. pour tout  $i \in I$ ,  $\{X = x_i\}$  est un événement :  $\{X = x_i\} \in \mathcal{A}$

→ Pourquoi cette condition 2. ? Le but est de calculer des probabilités. Or une probabilité n'est définie que sur des événements. Il faut donc s'assurer que ce que l'on étudie soit un événement.

→ Le cas des variables finies étudiées jusqu'à maintenant, est un cas particulier des variables discrètes.

#### Exemple 1 :

On effectue une infinité de lancers d'un dé équilibré. On introduit la variable aléatoire X qui donne le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier 1, si l'on obtient 1, et 0 si l'on n'obtient jamais 1.

Alors, introduite ainsi, on a :  $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\} = \mathbb{N}$ .

En fait, beaucoup d'énoncés définissent X sans prendre la peine de définir la valeur 0 c'est-à-dire :

soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier 1.

En fait : ces deux définitions de X reviennent au même car on a vu dans le chapitre précédent que presque sûrement, on effectuera un nombre fini de lancers puisque d'après le théorème de limite monotone,  $P(X = 0) = P(\text{"ne jamais obtenir 1"}) = \lim_{n \rightarrow +\infty}$

$P(\text{"ne pas obtenir de 1 en n lancers"}) = 0$ .

Donc même avec la première définition de X, X ne prend pas la valeur 0 presque sûrement, et donc on peut considérer que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$

\*

(ce que l'énoncé vous demandera de vérifier)

## Rappels :

### 1°) Définition

$(\Omega, P)$  est un espace probabilisé.

Une **variable aléatoire réelle** est une fonction  $X$  définie sur l'univers  $\Omega$  qui à chaque résultat possible associe un réel.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

### Exemple :

On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.  
On note le numéro de la face supérieure.

L'univers des possibles  $\Omega$  est l'ensemble constitué des entiers de 1 à 6.  
Autrement dit  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  (on peut écrire les éléments dans l'ordre que l'on veut).

### Règle du jeu

- Si le numéro obtenu est égal à 1, on gagne 3 €
- Si le numéro obtenu est égal à 2, on perd 2 €
- Si le numéro obtenu est égal à 3, 4, 5 ou 6, on ne gagne ni ne perd rien.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros.

$X$  est la fonction définie sur  $\Omega$  par  $X(1) = 3$ ,  $X(2) = -2$ ,  $X(3) = 0$ ,  $X(4) = 0$ ,  $X(5) = 0$ ,  $X(6) = 0$ .

$X$  peut prendre trois valeurs

La loi de probabilité de  $X$  est dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	3	-2	0	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	Total = 1

Calcul de l'espérance mathématique de  $X$ .

Il y a deux façons :

1<sup>ère</sup> façon : On prend chaque résultat possible du lancer de dé. On regarde le gain correspondant.

On sait que chaque numéro a la même probabilité :  $\frac{1}{6}$ .

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

2<sup>e</sup> façon : On utilise la loi de probabilité de  $X$ .

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

On prend chaque résultat.

Pour décrire plus précisément le comportement de  $X$ , sans pour autant caractériser complètement la loi de  $X$ , on peut s'intéresser aux écarts de  $X$  par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considère simplement la différence  $X - E[X]$ , on obtient un écart moyen  $E[X - E[X]] = 0$  (par linéarité de l'espérance). On pourrait considérer la valeur moyenne de  $|X - E[X]|$  mais on préfère considérer la moyenne de  $(X - E[X])^2$ , plus pertinente mathématiquement.

Interprétation :

Lorsque le jeu est répété un très grand nombre de fois\*, la moyenne du gain escompté est proche de l'espérance mathématique.

Si elle est positive, on peut dire que le joueur est gagnant sur un grand nombre de parties.

Si elle est négative, on peut dire que le joueur est perdant sur un grand nombre de parties.

\* Autrement dit, lorsque l'on crée des échantillons de grande taille de valeurs prises par une variable aléatoire (lors de simulations par exemple).

La variance de  $X$  est égale à 29.

L'écart-type de  $X$  est donc égal à racine carrée de 29.

Le joueur peut donc espérer obtenir une moyenne sur un grand nombre de parties de 1/6 euro avec une fluctuation importante de 5,38 € par partie.

Dans le cadre d'un jeu, la variance et l'écart-type sont des mesures du risque.

## I. Espérance mathématique, variance et écart-type d'une variable aléatoire

### 1°) Rappels des définitions

On se place dans un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega$  à valeurs réelles.

On note  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les valeurs prises par  $X$  (on suppose qu'il y a  $n$  valeurs possibles).

Valeurs possibles de X	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	
Probabilités $p_i = P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	Total = 1

Comme il y a un nombre fini de valeurs, on parle de variable aléatoire discrète (cf. en statistiques, « caractère discret », « caractère continu »).

• L'espérance mathématique de  $X$  est définie par la formule :  $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times P(X = x_i)$  ou

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i \times P(X = x_i)) \quad (\text{parenthèses pour une meilleure lisibilité}).$$

• La variance de  $X$  est définie par la formule :  $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i)$ .

De manière immédiate, on a  $V(X) \geq 0$ .

• L'écart-type de  $X$  est définie par la formule :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

### 2°) Autre définition de l'espérance

On peut écrire la formule suivante :  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\{\omega\})$ .

On prend l'image par  $X$  de chaque élément de l'univers que l'on multiplie par la probabilité.

Cette formule sera surtout utilisée dans les démonstrations du chapitre.

### 3°) Formule de Kœnig-Huygens (démontrée plus loin)

La variance de  $X$  peut aussi se calculer par la formule :  $V(X) = \left( \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2 \times P(X = x_i) \right) - [E(X)]^2$ .

**Le lundi 30 mai 2022**

• Si  $X$  est à valeurs positives ou nulles, alors  $E(X) \geq 0$ .

• Si  $X$  est à valeurs négatives ou nulles, alors  $E(X) \leq 0$ .

**Le lundi 1<sup>er</sup> juin 2022**

**Propriété :** signe de la variance

•  $V(X) \geq 0$

•  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$  est constante

Il s'agit de la même propriété que pour les séries statistiques.

### 4°) Propriété

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

Si  $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leq Y(\omega)$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

La démonstration découle de la formule du 2°).

### 5°) Autre formule pour la variance

La formule de définition de la variance peut s'écrire  $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ .

Dans cette formule,  $X^2$  désigne le carré de la variable aléatoire  $X$ . Il s'agit de la variable aléatoire dont les valeurs sont les carrés des valeurs de  $X$  avec les mêmes probabilités.

On peut dire que  $X^2$  est l'image de  $X$  par la fonction « carré ».

La formule de Kœnig-Huygens peut s'écrire  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ .

Dans cette formule,  $X^2$  désigne le carré de la variable aléatoire  $X$ . Il s'agit de la variable aléatoire dont les valeurs sont les carrés des valeurs de  $X$  avec les mêmes probabilités.

On peut dire que  $X^2$  est l'image de  $X$  par la fonction « carré ».

**Opération sur une variable aléatoire.**

**Exemple :** carré d'une variable aléatoire 1<sup>ère</sup> S « Ordonner les données brutes »

## II. Effet d'une transformation affine sur une variable aléatoire

Dans ce paragraphe, nous allons aborder les opérations sur une variable aléatoire.

### 1°) Situations-types

On considère une expérience aléatoire.

On note  $X$  le gain algébrique en euros pour un jeu associé à cette expérience aléatoire.

On suppose que l'on a déterminé la loi de probabilité de  $X$  et que l'on a calculé l'espérance et la variance de  $X$ .

On va étudier diverses situations dans lesquelles on modifie les gains.

On note alors  $Y$  le nouveau gain (autrement dit, on remplace  $X$  par une nouvelle variable aléatoire, donc on change de notation).

On veut obtenir les valeurs de l'espérance et de la variance de  $Y$  sans repasser par la loi de probabilité de  $X$ .

On ne refait pas le tableau de la loi de probabilité de  $Y$ , ce qui présente un gain de temps.

#### • Situation 1 :

On double tous les gains.

On note  $Y$  le nouveau gain en euro.

On a donc  $Y = 2X$ .

On peut écrire  $Y = 2 \times X + 0$ .

Pour connaître l'espérance et la variance de  $Y$ , on peut appliquer directement la formule avec  $a = 2$  et  $b = 0$  sans faire de calculs.

On obtient  $E(Y) = 2E(X)$  et  $V(Y) = 4V(X)$  (le dernier résultat provient du fait que  $2^2 = 4$ ).

#### • Situation 2 :

On ajoute 3 € à tous les gains.

On note  $Y$  le nouveau gain en euro.

On a donc :  $Y = X + 3$ .

On peut écrire  $Y = 1 \times X + 3$ .

Pour connaître l'espérance et la variance de  $Y$ , on peut appliquer directement la formule avec  $a = 1$  et  $b = 3$  sans faire de calculs.

On obtient  $E(Y) = E(X) + 3$  et  $V(Y) = V(X)$ .

#### • Situation 3 (situation hybride) :

On double tous les gains et on ajoute 3 € à tous les gains.

On note  $Y$  le nouveau gain en euro.

On a donc :  $Y = 2X + 3$ .

Pour connaître l'espérance et la variance de  $Y$ , on peut appliquer directement la formule avec  $a = 2$  et  $b = 3$  sans faire de calculs.

On obtient  $E(Y) = 2E(X) + 3$  et  $V(Y) = 4V(X)$ .

#### • Situation 4 :

On élève tous les gains au carré.

On note  $Y$  le nouveau gain en euro.

On a donc :  $Y = X^2$ .

Cette situation ne rentre pas dans le cadre de la formule.

Il n'y a pas de formule correspondant à cette situation.

Il faut refaire tous les calculs.

### 2°) Propriété

$X$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

$a$  et  $b$  sont deux réels (ce sont des coefficients constants).

On pose  $Y = aX + b$ .

On dit que  $Y$  est l'image de la variable aléatoire  $X$  par la fonction affine  $x \mapsto ax + b$ .

$Y$  est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

On a :

- $E(Y) = aE(X) + b$  (linéarité de l'espérance)

- $V(Y) = a^2V(X)$

- $\sigma(Y) = |a| \sigma(X)$

On retient souvent ces formules sous la forme :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$

- $V(aX + b) = a^2V(X)$

- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

On notera que les formules de la variance et de l'écart-type ne dépendent pas de  $b$ .

Il s'agit de formules analogues à celles sur l'effet d'une fonction affine sur des données (chapitre sur les statistiques).

#### Utilisation :

On pose  $Y = aX + b$ .  $Y$  est une nouvelle variable aléatoire qui est définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, P)$  que  $X$ .

On suppose que l'on connaît l'espérance, la variance et l'écart-type de  $X$ .

Les formules servent à trouver l'espérance, la variance et l'écart-type de  $Y$  sans refaire tous les calculs, notamment sans refaire le tableau de la loi de probabilité de  $X$ .

Des exemples concrets sont donnés dans le paragraphe 5°).



## 2°) Démonstration

On se place dans un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur  $\Omega$  à valeurs réelles.

L'espérance mathématique de  $X$  est donnée par :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\{\omega\}) .$$

On prend l'image par  $X$  de chaque élément de l'univers que l'on multiplie par la probabilité.

Cette formule peut sembler plus compliquée.

On ne va l'utiliser que pour les démonstrations.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \times P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + b) \times P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) \times P(\{\omega\}) + b \times P(\{\omega\})) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) \times P(\{\omega\})) + \sum_{\omega \in \Omega} (b \times P(\{\omega\})) \\ &= a \times \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) \times P(\{\omega\})) + b \times \sum_{\omega \in \Omega} (P(\{\omega\})) \\ &= a \times E(X) + b \times 1 \quad (\text{car on sait que } \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1) \\ &= a \times E(X) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left(\left(Y - E(Y)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(aX + b - (aE(X) + b)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(aX - aE(X)\right)^2\right) \\ &= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \\ &= a^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

## 3°) Application

On peut démontrer la formule de König-Huygens.

### Image d'une variable aléatoire discrète $X$ par une fonction $f$

#### Définition :

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $f$  une fonction.

On appelle image de  $X$  par  $f$  la variable aléatoire  $Y = f \circ X$  (composée de  $X$  suivie de  $f$ ).

$Y$  est donc définie par  $Y(\omega) = f(X(\omega))$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

La variable  $Y$  est souvent notée plus simplement  $f(X)$ .

#### Exemples :

- $X^2$  (carré d'une variable aléatoire)
- $aX + b$

Exemple d'utilisation dans la formule de König-Huygens

#### Théorème de transfert :

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \times P(X = x_i)$$

Exemple :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i)^2 \times P(X = x_i) \quad (\text{moment d'ordre 2 de la variable aléatoire } X)$$

Un jeu  
 $X$  : gain algébrique en euro (sans mise)  
 Avec une mise de 2 €, on note  $Y$  le nouveau gain algébrique.  
 On a  $Y=X-2$ .  
 On a  $E(Y)=E(X)-2$  et  $V(Y)=V(X)$ .

## Exercices sur effet d'une transformation affine d'une variable aléatoire

**1** (exemple de cours)

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $E(X) = 4$  et  $V(X) = 3$ .

On pose  $Y = 1 - 2X$ .

Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

**2** Un exercice se présente sous la forme de cinq affirmations indépendantes où l'élève doit répondre par vrai ou faux.

Chaque réponse juste rapporte deux points tandis qu'une réponse incorrecte pénalise l'élève d'un point. Ainsi, la note obtenue peut être négative.

Un élève décide de répondre au hasard à toutes les questions.

On note  $X$  la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes.

1°) Indiquer la loi de probabilité de  $X$  (par une phrase) ; calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

2°) On note  $Y$  la variable aléatoire qui indique la note obtenue à l'exercice.

a) Quelles sont les valeurs prises par  $Y$  ?

b) Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$  ; en déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .

c) Que dire de la stratégie de réponse au hasard ?

**3** Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux rouges et trois noires.

On tire au hasard une boule dans l'urne.

Si la boule est rouge, on perd 2 € ; si elle est noire, on gagne 1 €

Un joueur réalise cette épreuve quinze fois avec remise de la boule après un tirage.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur en euros et  $X$  la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges obtenues au terme des quinze tirages.

1°) Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

2°) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Quelle est son espérance mathématique et sa variance ?

3°) En déduire l'espérance mathématique et la variance de  $Y$ .

**4** Une urne contient dix boules blanches et  $n$  boules noires. Un joueur effectue deux tirages avec remise dans cette urne. Chaque boule blanche tirée rapporte 2 € et chaque boule noire fait perdre 3 €

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches et  $Y$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

2°) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Quelle est son espérance mathématique et sa variance ?

3°) En déduire l'espérance mathématique et la variance de  $Y$ .

4°) À partir de quelle valeur de  $n$  l'espérance de  $X$  devient-elle négative ou nulle ?

**5** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

$x_i$	-2	3	7	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	Total = 1

On pose  $Y = X^2$ .

Établir la loi de probabilité de  $Y$  puis calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .

# Corrigé des exercices

## Image d'une variable aléatoire par une fonction affine

1

On a  $Y = 1 - 2X$  que l'on peut écrire  $Y = -2X + 1$ .

On a donc  $Y = aX + b$  avec  $a = -2$  et  $b = 1$ .

On peut donc appliquer la propriété du cours.

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 - 2E(X) \\ &= 1 - 2 \times 4 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= (-2)^2 V(X) \\ &= 4V(X) \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} V(Y) &= 9V(X) \\ V(Y) &= 9 \times \frac{5}{4} \\ V(Y) &= \frac{45}{4} \end{aligned}$$

4

On note  $X$  le nombre de boules blanches.

$X$  suit la loi binomiale de paramètres 2 (nombre d'épreuves) et  $p = \frac{10}{10+n} e$ .

$$Y = 2X - 3(2 - X) = 5X - 6$$

5

Carré d'une variable aléatoire

$x_i$	-2	3	7	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	Total = 1

$$Y = X^2$$

La loi de probabilité de  $Y$  est donnée dans le tableau suivant :

$y_i$	4	9	49	
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	Total = 1

$$\begin{aligned} E(Y) &= 4 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{6} + 49 \times \frac{1}{3} \\ &= 2 + \frac{3}{2} + \frac{49}{3} \\ &= \frac{119}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= 4^2 \times \frac{1}{2} + 9^2 \times \frac{1}{6} + 49^2 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{119}{6}\right)^2 \\ &= \frac{15425}{36} \\ &= 428,4722\dots \end{aligned}$$

### III. Somme de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, nous allons aborder la notion d'opération sur deux variables aléatoires. Nous allons surtout nous intéresser à la somme de deux variables aléatoires.

#### 1°) Généralités

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $\Omega$ .

On suppose que  $X$  prend les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $Y$  prend les valeurs  $y_1, y_2, \dots, y_m$  avec  $n$  et  $m$  des entiers naturels non nuls.

On considère la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

$Z$  prend toutes les valeurs possibles  $x_i + y_j$  lorsque  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ .

On retiendra que les différentes valeurs possibles de  $Z$  s'obtiennent en additionnant les différentes valeurs possibles de  $X$  aux différentes valeurs possibles de  $Y$ .

La loi de probabilité de  $Z$  s'obtient en utilisant les lois de probabilité de  $X$  et  $Y$  comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

De nombreuses situations de probabilités peuvent être modélisées par des sommes de variables aléatoires.

#### 2°) Exemple (fondamental)

On lance deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

$X$  : numéro de la face supérieure du 1<sup>er</sup> dé.

$Y$  : numéro de la face supérieure du 2<sup>e</sup> dé.

On note  $Z$  la somme des numéros des faces supérieures des deux dés. On a  $Z = X + Y$ .

On cherche la loi de probabilité de  $Z$ .

$z_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

#### 3°) Complément

On peut définir de la même manière la différence, le produit, le quotient de deux variables aléatoires.

#### 4°) Un petit résultat à connaître (et quasiment évident....)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dont les ensembles de valeurs sont respectivement  $\llbracket 0; n \rrbracket$  et  $\llbracket 0; m \rrbracket$  où  $n$  et  $m$  sont deux entiers naturels.

- L'ensemble des valeurs qui sont prises par la variable aléatoire  $X + Y$  est l'intervalle d'entiers  $\llbracket 0; n + m \rrbracket$ .
- L'ensemble des valeurs qui sont prises par la variable aléatoire  $XY$  est l'intervalle d'entiers  $\llbracket 0; n \times m \rrbracket$ .

#### IV. Espérance mathématique et variance de la somme de variables aléatoires

##### 1°) Espérance mathématique

###### Propriété :

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers fini  $\Omega$ .

On a  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ .

Cette propriété permet de calculer l'espérance de X + Y sans déterminer la loi de probabilité de X + Y.

Cette propriété se généralise à plusieurs variables aléatoires.

Soit  $X_1, X_2 \dots X_n$  des variables aléatoires définies sur un même univers fini  $\Omega$ .

On a  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ .

###### Démonstration :

Le point-clé est de partir de la bonne formule de l'espérance. Si on part de la formule utilisant les valeurs de l'espace d'arrivée, il est alors difficile de démontrer cette formule car X et Y ne prennent pas forcément des valeurs identiques. Il vaut mieux partir de la formule utilisant l'espace de départ  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \times P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \times P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) \times P(\{\omega\})) + \sum_{\omega \in \Omega} (Y(\omega) \times P(\{\omega\})) \quad (\text{propriété de la somme : on séparé la somme en} \\ &\text{deux)} \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

##### 2°) Variance de la somme de variables aléatoires

###### Propriété admise sans démonstration :

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers fini  $\Omega$ .

Si X et Y sont indépendantes, alors  $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ .

Cette propriété se généralise à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

##### 3°) Résultat important pour le produit

###### Propriété admise sans démonstration :

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers fini  $\Omega$ .

Si X et Y sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ .

##### Variables aléatoires indépendantes

###### 1°) Définition [variables aléatoires indépendantes]

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

On dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour toute valeur x prise par X et toute valeur y prise par Y, les événements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants pour P c'est-à-dire

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

###### 2°) Propriété [admise dans démonstration]

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$ .

Alors pour tout couple  $(A; B)$  de parties de  $\Omega$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants pour P.

Cette propriété est très utilisée en pratique.

###### 3°) Situation d'épreuves aléatoires indépendantes

###### Propriété [admise sans démonstration]

On se place dans la situation d'une expérience aléatoire constituée de 2 épreuves aléatoires indépendantes modélisées par des espaces probabilisés finis.

On suppose que l'on a une variable aléatoire X pour la première expérience et une variable aléatoire Y pour la seconde expérience.

Nous admettons que X et Y sont indépendantes pour la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

Cette propriété se généralise à plusieurs épreuves.

Lorsque l'on a une expérience aléatoire constituée de n épreuves mutuellement indépendantes numérotées de 1 à n modélisées par des espaces probabilisés finis.

Soit  $X_1, X_2 \dots X_n$  des variables aléatoires attachées respectivement aux épreuves 1, 2, ..., n.

Les variables  $X_1, X_2 \dots X_n$  sont mutuellement indépendantes.

# Exercices sur les sommes de variables aléatoires

**1** On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1°) On lance le dé et on note  $X$  le numéro de la face supérieure.

Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?

Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

2°) On lance le dé deux fois de suite. On note  $S$  la somme des numéros des faces supérieures obtenues.

Quelle est la loi de probabilité de  $S$  ?

Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .

Retrouver ces deux résultats en utilisant l'espérance et la variance de  $X$ .

3°) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous d'en-tête `def si muS()`: qui simule  $S$ .

```
def si muS():
    x1=randi nt( , )
    x2=randi nt( , )
    s=....
    return ...
```

On suppose que l'on a préalablement importé la fonction `randi nt` de la bibliothèque `random` (instruction `from random i mport randi nt` au début du programme).

**2** Pour la réalisation d'un projet, une société doit effectuer successivement deux tâches A et B.

Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche A (en semaine) et  $Y$  la variable aléatoire prenant pour valeur la durée de la tâche B (en semaine).

On suppose que la durée de la tâche A n'a pas d'influence sur la durée de la tâche B.

L'espérance mathématique de  $X$  est de 22 et l'écart-type de 3.

L'espérance mathématique de  $Y$  est de 25 et l'écart-type de 4.

1°) Que représente la variable aléatoire  $Z = X + Y$  ?

2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $Z$ .

**3** Deux lycées sont situés dans la même commune.

Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bon résultats aux examens : 75 % des élèves obtiennent le bac avec mention.

Dans le lycée B, seulement 55 % des élèves l'obtiennent avec mention.

On choisit 12 élèves du lycée A et 20 élèves du lycée B.

Le nombre d'élèves de chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à deux tirages avec remise.

1°) On note respectivement  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires comptant les élèves ayant obtenu une mention parmi les élèves des lycées A et B choisis.

Quelles sont les lois de probabilité de  $X$  et  $Y$  ?

2°) Soit  $Z$  la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves ayant obtenu une mention parmi tous ceux interrogés.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $Z$ .

**4** Quatre jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 4 sont placés dans un sac. On choisit au hasard un jeton dans le sac. On ne le remet pas et on choisit au hasard un deuxième.

1°) On note  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

Calculer son espérance et sa variance.

2°) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au produit des numéros des deux jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

Calculer son espérance et sa variance.

5 Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient  $n+1$  boules numérotées respectivement  $0, 1, 2, \dots, n$  indiscernables au toucher.

On tire une boule de l'urne. On note son numéro que l'on note  $X$  et on la remet dans l'urne.

Puis on tire une seconde boule, on note son numéro que l'on note  $Y$  et on la remet dans l'urne.

Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

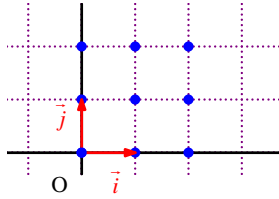
À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le point  $M$  de

coordonnées  $(X; Y)$ .

Exemple :

On se place dans le cas  $n = 2$ . L'urne contient alors 3 boules numérotées  $0, 1, 2$ .

On obtient les points bleus suivants sur le graphique ci-dessous (9 points au total).



1°) Quelle est la loi de probabilité de  $X$  et  $Y$  ? Que peut-on dire de  $X$  et  $Y$  ?

2°) Calculer la probabilité des événements  $A$  : « Le point  $M$  est sur l'axe des abscisses » et  $B$  : « Le point  $M$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1 ».

3°) On admet que  $E(X^2) = E(Y^2) = \frac{n(2n+1)}{6}$  (on pourra vérifier ces résultats pour s'entraîner).

Soit  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe  $OM^2$  (carré de la distance  $OM$ ).

Exprimer  $Z$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

En déduire l'espérance mathématique de  $Z$  en fonction de  $n$ .

**Variantes :**

Calculer l'espérance et la variance de  $X^2$  et  $Y^2$ .

On donnera les expressions en fonction de  $n$  sous la forme la plus simple possible.

Il est possible de transformer l'exercice en un exercice dans l'espace avec trois lancers.

**Le mercredi 18 mai 2022**

On reprend le même énoncé que l'exercice précédent.

On pose  $Z = OM$ .

On admet que  $E(Z) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{i^2 + j^2}$ .

À l'aide du site dcode, rubrique « somme double », déterminer la valeur de  $E(Z)$  pour  $n = 100$ .

$$E(Z) = \frac{1}{100^2} \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} \sqrt{i^2 + j^2}$$

dcode donne  $\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} \sqrt{i^2 + j^2} \approx 771\,674$  donc  $E(Z) \approx 77,1674$

5

1°) On répond sans tableau par une phrase.

Comme toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées,  $X$  et  $Y$  suivent la loi uniforme sur  $\llbracket 0; n \rrbracket$ .

$$\text{On a } \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(X = k) = \frac{1}{n+1}.$$

De plus, on peut dire que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

2°)

**Pour A**

$A$  est l'événement  $(Y = 0)$ .

$$P(A) = P(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

**Pour B, on fait un graphique.**

Il y a deux points  $M$  possibles appartenant à  $\mathcal{C}$  : les points de coordonnées  $(0; 1)$  et  $(1; 0)$ .

$$P(B) = P((X = 0) \cap (Y = 1)) + P((X = 1) \cap (Y = 0))$$

$$= P(X = 0) \times P(Y = 1) + P(X = 1) \times P(Y = 0) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(n+1)^2}$$

On a  $Z = OM^2$ .

Or  $M$  est le point de coordonnées  $X$  et  $Y$  donc  $Z = X^2 + Y^2$ .

$$\text{On en déduit que } E(Z) = E(X^2) + E(Y^2) = 2 \times \frac{n(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)}{3}.$$

4°) Soit  $T$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe  $OM$ .

Écrire l'espérance de  $T$  sous la forme d'une somme.

À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur arrondie au dixième de l'espérance de  $T$  pour  $n = 2022$ .

# Solutions des exercices

## Somme de variables aléatoires

**1**

1°) X suit la loi uniforme discrète sur  $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ .

La probabilité de chaque entier  $i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$  est égale à  $\frac{1}{6}$ .

Pour calculer l'espérance et la variance, on peut appliquer directement les formules du cours.

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5$$

$$V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$$

On pourrait utiliser directement les formules pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

2°)

S peut prendre toutes les valeurs entières entre 2 et 12.

$s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total = 1
$P(S=s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

On observe que S ne suit pas une loi uniforme.  
Il n'est pas utile de simplifier les fractions.

$$E(S) = 7$$

$$V(S) = \frac{35}{6}$$

On a  $S = X_1 + X_2$  avec  $X_1$  : résultat du premier dé et  $X_2$  : résultat du deuxième dé.

$X_1$  et  $X_2$  suivent toutes les deux la même loi que X et sont indépendantes.

On a donc

$$E(S) = 2E(X) = 7$$

$$V(S) = 2V(X) = \frac{35}{6}$$

On retrouve les deux résultats calculés à partir de la loi de probabilité de S.

3°) Programme Python

```
def simuS() :
    x1=randint(1, 6)
    x2=randint(1, 6)
    s=x1+x2
    return s
```

Exercice 3

1°) Z représente la durée totale du travail en semaine

2°)

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 22 + 25 = 47$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 9 + 16 = 25$$

$$S(Z) = 5$$

Exercice 2 à échanger de place :

On répète dans des conditions identiques indépendantes.

X suit la loi de binomiale de paramètres 12 (nombre de répétitions) et de paramètre 0,75 (probabilité d'in succès).

Y suit la loi de binomiale de paramètres 20 (nombre de répétitions) et de paramètre 0,55 (probabilité d'in succès).

$$E(Z) = E(X) + E(Y) = 12 \times 0,75 + 20 \times 0,55 = 20$$

$$V(Z) = V(X) + V(Y) = 12 \times 0,75 \times 0,25 + 20 \times 0,55 \times 0,45 = 7,2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (0^2 \times 0,6 + 5^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,1 + 20^2 \times 0,1) - 4^2$$

$$= 5 + 10 + 40 - 16$$

$$= 39$$



# V. Application à la somme et à la moyenne de variables aléatoires qui suivent la même loi

On se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) qui suivent toute la même loi qu'une variable aléatoire  $X$ .

On dit parfois qu'il s'agit de « copies » de  $X$ .

## 1°) Somme

### Définition :

On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

$S_n$  est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$  appelée **somme** des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

On peut éventuellement utiliser le symbole  $\Sigma$  pour écrire cette somme :  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ .

### Propriété 1 :

$$E(S_n) = n \times E(X) \text{ car } E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

### Propriété 2 :

Si, de plus,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(S_n) = n \times V(X) \text{ et } \sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X).$$

### Définition [échantillon d'une variable aléatoire]

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) qui suivent toute la même loi qu'une variable aléatoire  $X$  (c'est-à-dire  $n$  « copies » de  $X$ ) et mutuellement indépendantes. On dit que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un échantillon de  $X$ .

Attention, le sens du mot échantillon est ici différent de celui déjà employé en statistiques.

## Le 24-7-2023

Extrait d'un cahier d'exercices de 2<sup>e</sup> page 152 (« Comprendre la fluctuation d'échantillonnage »)

On considère une expérience aléatoire.

Un échantillon de taille  $n$  ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) est constitué des résultats obtenus par  $n$  répétitions de cette expérience aléatoire dans des conditions identiques indépendantes.

**Application : répétition d'une variable aléatoire dans des conditions identiques indépendantes**

**Propriété :**

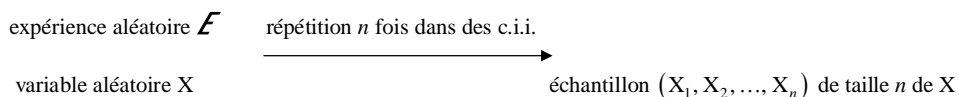
Soit  $\mathcal{E}$  une expérience aléatoire et  $X$  une variable aléatoire liée à  $\mathcal{E}$

On répète  $\mathcal{E}$   $n$  fois dans des conditions identiques indépendantes ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

On obtient un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $X$  :  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivent toute la même loi que  $X$  (ce sont  $n$  « copies » de  $X$ ) et sont mutuellement indépendantes.

**Le 25-5-2023**

Schéma cours sur les variables aléatoires en T spé :



**Exemple :**

On mise 2 euros et on lance un dé équilibré à 4 faces.

On gagne 4 euros si on obtient 1, on gagne 8 euros si on obtient 2 et on ne gagne rien si on obtient autre chose.

On fait 15 fois ce jeu.

$S$  est la variable aléatoire donnant le gain algébrique total en euros.

Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .

*Solution :*

On note  $X$  le nombre de points pour une partie.

La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	-2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4}$$

$$= 2$$

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$$= (-2 - 2)^2 \times \frac{1}{2} + (4 - 2)^2 \times \frac{1}{4} + (8 - 2)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 8 + 1 + 9$$

$$= 18$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = (0^2 \times 0,6 + 5^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,1 + 20^2 \times 0,1) - 4^2$$

$$V(X) = 5 + 10 + 40 - 16$$

$$V(X) = 39$$

On peut passer au calcul de l'espérance et de la variance de  $S$ .

Il s'agit d'une situation-type de répétition d'une expérience aléatoire dans des conditions identiques indépendantes.

Les 15 parties sont indépendantes les unes des autres donc elles constituent un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{15})$  de taille 15 de la loi de probabilité de  $X$  [comme les épreuves sont indépendantes, les variables  $X_1, X_2, \dots, X_{15}$  sont mutuellement indépendantes].

On a  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{15}$  (somme de l'échantillon).

On peut éventuellement utiliser le symbole  $\Sigma$  pour écrire cette somme :  $S = \sum_{i=1}^{i=15} X_i$ .

D'après les propriétés 1 et 2 (espérance et variance de la somme d'un échantillon), on a :

$$E(S) = 15 \times E(X) = 30$$

$$V(S) = 15 \times V(X) = 15 \times 18 = 270$$

## Exercices sur somme de variables aléatoires qui suivent la même loi

**1** On lance 6 fois un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note  $S$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés sur les faces inférieures. Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .

**2** Quand elle va au restaurant, Nelly a l'habitude de poster un avis sur Internet.  $X$  est la variable aléatoire qui donne le nombre d'étoiles qu'elle attribue à un restaurant. En se basant sur les statistiques de ses avis précédents, on a pu établir la loi de probabilité de  $X$ .

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,03	0,12	0,2	0,35	0,3

On considère une série de dix futurs avis que l'on peut considérer comme un échantillon de la loi de  $X$ .  
 1°) Quelle est la taille de cet échantillon ?  
 2°) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de  $X$ .  
 3°) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la somme  $S$  des étoiles attribuées pour une telle série.

**3** On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à  $p$  avec  $0 < p < 1$ .  
 On lance  $n$  fois cette pièce ( $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 1).  
 Chaque fois que l'on obtient pile, on gagne 1 €  
 Chaque fois que l'on obtient face, on perd 1 €  
 Pour tout entier naturel  $k$  compris entre 1 et  $n$  on note  $X_k$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on obtient pile et la valeur  $-1$  si on obtient face. On note  $S_n$  le gain algébrique du joueur à l'issue des  $n$  lancers.  
 1°) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $X_1, \dots, X_n$ .  
 2°) Déterminer la loi de probabilité des variables aléatoires  $X_k$  (dans un tableau) puis calculer leur espérance et leur variance.  
 3°) En déduire l'espérance et la variance de  $S_n$  en fonction de  $n$  et de  $p$ . On donnera le résultat sous forme factorisée.

**4** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.  
 Une urne contient des boules indiscernables au toucher :  
 1 boule porte le numéro 1,  
 2 boules portent le numéro 2 ;  
 ...  
 $n$  boules portent le numéro  $n$ .  
 1°) Quel est le nombre de boules de cette urne ?  
 2°) On tire une boule au hasard et on note son numéro.

Soit  $X$  la variable qui prend pour valeur le numéro de la boule tirée.  
 Les valeurs possibles de  $X$  sont donc  $1, 2, \dots, n$ .  
 Soit  $i$  un entier naturel tel que  $1 \leq i \leq n$ . Exprimer  $P(X = i)$  en fonction de  $n$  et de  $i$ .  
 Exprimer l'espérance et la variance de  $X$  sous la forme la plus simple possible.  
 On utilisera les formules donnant la somme des carrés et des cubes des  $n$  premiers entiers naturels :  

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
 On donnera les résultats sous forme factorisée.  
 3°) On effectue  $p$  tirages successifs avec remise,  $p$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1. On note  $S$  la somme des numéros tirés.  
 Exprimer l'espérance et la variance de  $S$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

# Solutions des exercices sur somme de variables aléatoires qui suivent la même loi de probabilité

## 1 Lancers d'un dé tétraédrique

On ne cherche pas la loi de probabilité de S.

On note  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  les résultats pour chacun des six lancers. Il s'agit de 6 variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité : la loi uniforme sur l'univers  $\Omega = \llbracket 1; 4 \rrbracket$  (en effet, le dé n'est pas truqué ; on a la même probabilité d'obtenir chaque face).

$X_1$  : résultat du 1<sup>er</sup> lancer

$X_2$  : résultat du 2<sup>e</sup> lancer

$X_6$  : résultat du 6<sup>e</sup> lancer

On n'est pas obligé de donner la loi de probabilité dans un tableau.

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$$V(X_1) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad (\text{formule de König-Huygens})$$

On pourrait utiliser directement les formules pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\text{On applique les formules pour } n=4 : E(X_1) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} ; V(X_1) = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + V(X_5) + V(X_6)$  car  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  sont mutuellement indépendantes.

$$\text{Or } S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6,$$

$$E(S) = 6 \times E(X_1) = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

$$V(S) = 6 \times V(X_1) = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2} \quad \text{car } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \text{ sont mutuellement indépendantes.}$$

Autre version :

On note X la variable aléatoire donnant le numéro obtenu pour un lancer du dé. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Les six lancers sont indépendants les uns des autres. Ils constituent donc un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_6)$  de taille 6 de la loi de probabilité de X.

On note S la somme de cet échantillon.

On calcule l'espérance mathématique et la variance de X.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

D'après les propriétés vues en cours :

$$E(S) = 6 \times E(X) = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

$$V(S) = 6 \times V(X) = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$$

## 2

$x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,03	0,12	0,2	0,35	0,3

On considère une série de dix futurs avis que l'on peut considérer comme un échantillon de la loi de X.

1°) Quelle est la taille de cet échantillon ?

On a un échantillon de taille 10 car on envisage une série de 10 futurs avis.

2°) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

$$E(X) = 1 \times 0,03 + 2 \times 0,12 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,35 + 5 \times 0,3 = 3,77$$

$$V(X) = 1^2 \times 0,03 + 2^2 \times 0,12 + 3^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,35 + 5^2 \times 0,3 - 3,77^2 = 1,1971$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,1971} = 1,09...$$

3°)

$$E(S) = 10 \times E(X) = 37,7$$

$$V(S) = 10 \times V(X) = 11,971$$

$$\sigma(S) = \sqrt{10} \times \sigma(X)$$

$$\sigma(S) \approx 3,46 \text{ (valeur arrondie au centième)}$$

### 3 Lancers d'une pièce truquée

1°)

$$\text{On a } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

$$\text{On peut aussi écrire } S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i.$$

2°) On va s'intéresser à  $X_1$ , les calculs étant valables pour tous les  $X_i$ .

$X_1$  prend la valeur 1 avec la probabilité  $p$  et la valeur  $-1$  avec la probabilité  $1-p$ .

$x_i$	1	-1
$P(X_1 = x_i)$	$p$	$1-p$

Calculons l'espérance de  $X_1$  (notée  $E(X_1)$ ):

$$E(X_1) = p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p-1$$

Calculons la variance de  $X_1$  (notée  $V(X_1)$ ).

On utilise la formule de König-Huygens.

$$V(X_1) = p \times 1^2 + (1-p) \times (-1)^2 - [E(X_1)]^2 = 1 - [E(X_1)]^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p)$$

3°)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivent toutes la même loi de probabilité.

$$\text{D'où } E(S_n) = n \times E(X_1) = n(2p-1).$$

On ne développe pas, cela n'a pas d'intérêt.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  suivent toutes la même loi de probabilité et sont mutuellement indépendantes donc

$$V(S_n) = n \times V(X_1) = 4np \times (1-p).$$

### 4

1°) Le nombre total de boules de l'urne est  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2°)

$$P(X=i) = \frac{i}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}$$

3°)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} (k \times P(X=k)) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k \times k}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \left( \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \right) \quad (\text{on « sort » le } \frac{2}{n(n+1)} \text{ qui ne dépend pas de } k)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{on utilise la formule } \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

$$= \frac{2n+1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{k=n} (k^2 \times P(X=k))$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \left( k^2 \times \frac{2k}{n(n+1)} \right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} k^3$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9}$$

$$= \frac{9n^2 + 9n - 2(4n^2 + 4n + 1)}{18}$$

$$= \frac{9n^2 - 8n^2 + 9n - 8n - 2}{18}$$

$$= \frac{n^2 + n - 2}{18}$$

$$[ = \frac{(n-1)(n+2)}{18} \text{ ligne facultative}]$$

## 2°) Moyennes de variables aléatoires

- On suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

### Définition [moyenne de plusieurs variables aléatoires] :

On pose  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  (moyenne des  $n$  variables aléatoires).

Autrement dit, on a  $M_n = \frac{S_n}{n}$  avec la notation du paragraphe précédent.

$M_n$  est une variable aléatoire définie sur l'espace  $(\Omega, P)$  appelée **moyenne** des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

$M_n$  est parfois notée  $\overline{X}_n$ . Ainsi  $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ .

- On suppose à présent que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivent toutes la même loi qu'une variable aléatoire  $X$ .

### Propriété 1 :

$$E(M_n) = E(X) \text{ car } E(M_n) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{n \times E(X)}{n} = E(X)$$

### Propriété 2 :

Si de plus,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors  $V(M_n) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{nV(X)}{n^2} = \frac{V(X)}{n}$ .

On a donc  $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

### Conséquence :

La suite  $(V(M_n))$  est décroissante et converge vers 0 ( $V(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ).

Plus  $n$  est grand, plus la variance et l'écart-type de  $M_n$  sont petits.

### Récapitulatif :

$X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires qui suivent toute la même loi qu'une variable aléatoire  $X$ .

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

- $E(M_n) = E(X)$
- Dans le cas où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes (c'est-à-dire  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un échantillon de  $X$ ) :  $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$  et  $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

### 3°) Exercice-type

On considère un jeu de hasard pour lequel on peut gagner un certain nombre de points  $X$ .

La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	0	5	10	20
$P(X = x_i)$	0,6	0,2	0,1	0,1

Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties successives indépendantes.

*Solution :*

Il s'agit d'une situation-type de répétition d'une expérience aléatoire dans des conditions identiques indépendantes.

Les 10 parties sont indépendantes les unes des autres donc elles constituent un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$  de taille 10 de la loi de probabilité de  $X$  [comme les épreuves sont indépendantes, les variables  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  sont mutuellement indépendantes].

On note  $M$  la moyenne de cet échantillon.

Cette variable aléatoire modélise le gain moyen.

On calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ .

$$E(X) = 0 \times 0,6 + 5 \times 0,2 + 10 \times 0,1 + 20 \times 0,1 = 4$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= (0^2 \times 0,6 + 5^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,1 + 20^2 \times 0,1) - 4^2 \\ &= 5 + 10 + 40 - 16 \\ &= 39 \end{aligned}$$

$$E(X) = 4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{39}$$

D'après les propriétés du 2°), on a :

$$E(M) = E(X) = 4$$

$$\sigma(M) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{10}} = \sqrt{3,9} = 1,97484176\dots$$

## Exercices sur moyennes de variables aléatoires

**1** Chaque jour, Damien résout une fois le Rubik's Cube.  $X$  est l'écart, en secondes, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau ci-dessous.

$x_i$	0	1	2	10	20
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une série de 30 jours.

**2** Une urne contient 5 boules bleues, 11 boules rouges, 4 boules jaunes.

On tire une boule au hasard dans l'urne.

Si la boule tirée est bleue, on perd 2 euros.

Si la boule tirée est rouge, on gagne 1 euro.

Si la boule tirée est jaune on gagne 4 euros.

1°) On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le gain algébrique en euros.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$  puis calculer sa variance et son écart-type.

2°) On considère un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de  $X$ ,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ .

Déterminer la taille de l'échantillon  $n$  à partir de laquelle la variance de  $M_n$  est inférieure ou égale à 0,05.

## Solutions des exercices sur moyennes de variables aléatoires

**1**

$x_i$	0	1	2	10	20
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,1	0,1	0,05

On commence par calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

$$E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,1 + 10 \times 0,1 + 20 \times 0,05$$

$$= 0,25 + 0,2 + 1 + 1$$

$$= 2,45$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (0^2 \times 0,5 + 1^2 \times 0,25 + 2^2 \times 0,1 + 10^2 \times 0,1 + 20^2 \times 0,05) - 2,45^2$$

$$= 24,6475$$

$$\sigma(X) = \sqrt{24,6475}$$

On détermine ensuite l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une série de 30 jours.

On note  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$  l'écart respectif du premier jour, du deuxième jour, ..., du trentième jour.

On a donc un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{30})$  de taille 30 de la loi de probabilité de  $X$ .

On note  $M$  la moyenne de cet échantillon.

$$\text{On a } M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{30}}{30}.$$

$$\text{D'après le cours, } E(M) = E(X) = 2,45 \text{ et } \sigma(M) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{24,6475}{30}}.$$



2

L'univers des possibles  $\Omega$  est l'ensemble des 20 boules de l'urne.

On adopte le modèle d'équiprobabilité, c'est-à-dire que l'on munit  $\Omega$  de la probabilité uniforme  $P$ .

$X$  peut prendre trois valeurs :  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 4$ .

La loi de probabilité de  $X$  est dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	-2	1	4	
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{20}$	Total = 1

On commence par calculer l'espérance mathématique et la variance de  $X$ .

$$E(X) = \frac{17}{20}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{95}{20} - \left(\frac{17}{20}\right)^2$$

$$= \frac{20 \times 95 - 17^2}{20^2}$$

$$= \frac{1611}{400}$$

$$= 4,0275$$

$$\text{On a } M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Comme  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un échantillon de  $X$ , on sait, d'après la propriété du cours, que :  $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ .

$$\text{On a donc } V(M_n) = \frac{4,0275}{n}.$$

On cherche les entiers naturels  $n$  tels que  $V(M_n) \leq 0,05$  soit  $\frac{4,0275}{n} \leq 0,05$  (1).

(1)  $\Leftrightarrow n \geq \frac{4,0275}{0,05}$  (passage à l'inverse possible avec changement du sens de l'inégalité, car les deux membres sont strictement)

$$\Leftrightarrow n \geq 80,55$$

Conclusion : La variance de  $M_n$  est inférieure ou égale à 0,05 à partir d'un échantillon de taille 81.

# VI. Variables de Bernoulli et loi binomiale

## 1°) Définition et propriétés

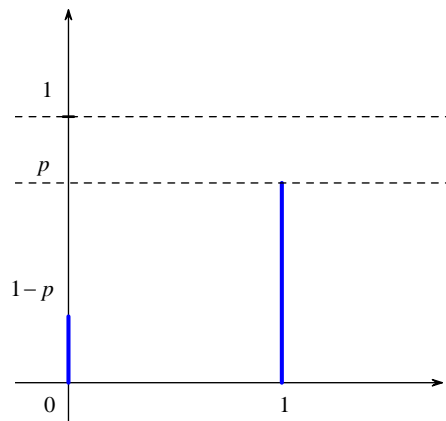
On considère une épreuve de Bernoulli telle que la probabilité d'un succès  $S$  soit égale à  $p$  où  $p$  est un réel compris entre 0 et 1.

On note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un succès et 0 si on obtient un échec.

$X$  peut prendre les valeurs  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$ .

La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau ci-dessous :

$x_i$	1	0
$P(X = x_i)$	$p$	$1 - p$



Calculons l'espérance mathématique et la variance de  $X$ .

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p)$$

$$= p$$

Avec la définition :

$$\begin{aligned} V(X) &= (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p)(1-p+p) \quad (\text{on factorise par } p(1-p)) \\ &= p(1-p) \times 1 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Avec la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= 1^2 \times p + 0^2 \times q - p^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

On pose souvent  $q = 1 - p$  ;  $q$  est la probabilité d'un échec.

On retient alors  $V(X) = pq$ .

## 2°) Schéma de Bernoulli

On répète  $n$  fois l'épreuve de Bernoulli dans des conditions identiques indépendantes,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On numérote les épreuves 1, 2, ...,  $n$ .

Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'épreuve numéro  $i$ .

On note  $X$  le nombre de succès à l'issue des  $n$  épreuves.

On a  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  (on peut écrire  $X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ ).

On va calculer l'espérance mathématique et la variance de  $X$ .

*Calcul de l'espérance mathématique :*

Pour cela, on utilise la propriété suivante sur les variables aléatoire qui peut se démontrer assez facilement : « L'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances des variables aléatoires ».

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{i=n} p \\
&= p + p + \dots + p \\
&= n \times p
\end{aligned}$$

Calcul de la variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} V(X_i) \text{ car les } X_i \text{ sont des variables indépendantes}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{i=n} (pq) \\
&= npq
\end{aligned}$$

N. B. : Pour  $n = 1$ , on retrouve les formules du 1°). Une épreuve de Bernoulli est un schéma de Bernoulli avec une seule répétition.

## Exercices sur les variables de Bernoulli

**1** Un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de un à six est lancé  $n$  fois,  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note chaque fois les numéros des faces supérieures obtenues à chaque lancer.

1°) Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et 6, on note  $X_i$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le numéro  $i$  n'est jamais sorti et 0 sinon.

Déterminer la loi de probabilité de  $X_i$ .

2°) On note  $S$  la variable aléatoire qui compte le nombre de numéros qui ne sont jamais sortis.

Calculer l'espérance et la variance de  $S$ .

**2** Au rez-de-chaussée d'un immeuble de  $n$  étages ( $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 1),  $p$  personnes entrent dans un ascenseur.

On suppose que chaque personne descend à un étage donné avec la probabilité  $\frac{1}{n}$  et que personne n'entre dans

l'ascenseur aux étages.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à une montée de l'ascenseur, associe le nombre d'arrêts qu'il effectue aux étages.

Pour  $i$  entier naturel compris entre 1 et  $n$ , on appelle  $X_i$  la variable aléatoire égale à 1 si l'arrêt à l'étage  $i$  a été demandé, et 0 sinon.

1°) On suppose que  $n$  est égal à 4.

a) On s'intéresse à la variable aléatoire  $X_1$ . On rappelle que  $X_1$  prend la valeur 1 si l'arrêt à l'étage 1 a été demandé et prend la valeur 0 sinon.

Justifier que  $P(X_1 = 0) = 0,75^p$ . En déduire  $P(X_1 = 1)$ .

b) On s'intéresse à la variable aléatoire  $X_2$ . On rappelle que  $X_2$  prend la valeur 1 si l'arrêt à l'étage 2 a été demandé et prend la valeur 0 sinon.

Déterminer  $P(X_2 = 0)$  et  $P(X_2 = 1)$ .

2°) Dans cette question,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer  $P(X_i = 0)$  pour tout  $i$  entier naturel compris entre 1 et  $n$ .

b) Calculer  $E(X_i)$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire que  $E(X) = n \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^p \right]$ .

d) Démontrer que l'espérance du nombre d'arrêts est toujours inférieure à la moitié du nombre d'étages.

**3** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère  $n$  cartes numérotées de 1 à  $n$ . On permute au hasard les cartes de jeu et on note  $Y$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de cartes qui occupent leur place naturelle (on dit que la carte numéro  $k$  est à sa place si c'est la  $k$ -ième en partant du haut du paquet).

On choisit pour univers des possibles  $\Omega$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  (de cardinal  $n!$ ). On munit  $\Omega$  de la probabilité uniforme.

Soit  $X_k$  la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si la  $k$ -ième carte est à sa place et 0 sinon.

1°) Donner un lien entre  $Y$  et les  $X_1, \dots, X_n$ .

2°) Déterminer la loi de probabilité de  $X_1, \dots, X_n$ .

3°) Démontrer que  $E(Y) = 1$  et  $V(Y) = 1$ .

Il s'agit d'un problème de rencontres.

**4** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ .

On tire une poignée (éventuellement vide) de jetons dans cette urne.

Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on appelle  $X_i$  la variable aléatoire égale à 1 si le jeton numéro  $i$  est dans la poignée et 0 sinon.

On admet que  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

On appelle  $S$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.

Exprimer  $S$  en fonction des variables  $X_i$  et en déduire son espérance.

# Solutions des exercices sur les variables de Bernoulli

1

$X_i$  : 1 si  $i$  n'est jamais sorti

$X_i$  : 0 si  $i$  est sorti au moins une fois

$x_i$ valeur	1	0
$P(X = x_i)$ probabilité	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ .

$$2^\circ) S = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$$

$$E(S) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= n \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad (\text{on sort le } \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ qui ne dépend pas de } i)$$

3

1°) On a  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

On peut aussi écrire  $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ .