T spécialité

Devoir facultatif pour le lundi 9 mai 2022

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ et $v_n=\left(1-\sqrt{2}\right)^n$.

On pose également $a_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $b_n=\dfrac{u_n-v_n}{2\sqrt{2}}$.

1°) À l'aide la formule du binôme de Newton, démontrer que pour tout entier naturel n,

- a_n est un entier naturel impair ;
- b_n est un entier naturel pair si n est pair et un entier naturel impair si n est impair.

2°) Démontrer que $\cos\left(\pi b_n\right)=\left(-1\right)^n$ et que $\cos\left(\pi b_n\sqrt{2}\right)=-\cos\left(\pi v_n\right)$.

3°) Déterminer la limite de $\cos\left(\pi b_n\sqrt{2}\right)$ lorsque $n\to+\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante pour une suite $\left(x_n\right)$ définies sur $\mathbb{N}$:

> Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où ℓ est un réel, alors $\cos x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos \ell$.

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos\left(ax\right)+\cos\left(bx\right)$ où a et b sont deux réels fixés.

1°) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

3°) Dans cette question, on suppose que $a=1$ et $b=\sqrt{2}$ de sorte que l'expression de f est $f\left(x\right)=\cos x+\cos\left(x\sqrt{2}\right)$.

Tracer la représentation graphique de f sur la calculatrice.

Le but de la question est de déterminer les minorants de f sur $\mathbb{R}$.

- Soit m un minorant de f sur $\mathbb{R}$. On rappelle que m est un réel tel que $f\left(x\right)\geqslant m$ pour tout réel x.

En considérant $f\left(\pi b_n\right)$ pour n entier naturel quelconque et en utilisant les résultats des questions 2°) et 3°) de la partie A, démontrer que $m\leqslant -2$.

On utilisera le résultat appelé théorème de passage à la limite dans une inégalité pour deux suites $\left(x_n\right)$ et $\left(y_n\right)$ définies sur $\mathbb{N}$:

> On suppose que ;
> $\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n\leqslant y_n$;
> $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où ℓ est un réel ;
> $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ où ℓ' est un réel.
> On a alors $\ell\leqslant\ell'$.

- Conclure.
- f admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}$? Justifier.

On pourrait aussi s'intéresser à la fonction g définie par $g\left(x\right)=\cos x+\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

4°) On revient au cas général où a et b sont deux réels quelconques.
On fait l'hypothèse supplémentaire que $a\neq b$ et $a\neq -b$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f\left(x\right)=0 \quad (\text{E})$.