T spécialité

Devoir pour le lundi 9 mai 2022

I. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes $u_0 = a$ et $v_0 = b$ où a et b sont deux réels donnés ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{{v_n}^2}{u_n + v_n} \end{cases}$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques cas particuliers suivant les valeurs de a et b.

1°) On suppose que $a = 0$ et que $b \neq 0$.
Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) dans ce cas ?

2°) On suppose que $a \neq 0$ et que $b = 0$.
Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) dans ce cas ?

3°) On suppose que $a = b$ et que $a \neq 0$.
Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a + b \neq 0$ et que $b \neq 0$.
On admettra que les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ et que tous les termes de (v_n) sont non nuls.

Pour tout entier naturel n, on pose $x_n = u_n - v_n$ et $y_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1°) Démontrer que la suite (x_n) est constante.

2°) Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire y_n en fonction de n.

3°) On suppose de plus dans cette question que $a \neq b$.
À l'aide des deux questions précédentes, exprimer u_n et v_n en fonction de n.

II.

Rappels : Loi de probabilité sur un univers fini

① Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (univers des possibles).
On définit une **loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) sur Ω en attribuant aux résultats des nombres fixes p_1, p_2, …, p_n vérifiant les deux conditions suivantes :

C_1 : pour tout entier naturel $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_i \geqslant 0$;

C_2 : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

On notera que les deux conditions entraînent $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

② Tableau

Issues	e_1	e_2	…	e_n	
Probabilités	p_1	p_2	…	p_n	Total $=1$

③ Notation

On note P la loi de probabilité.
On écrira $P(e_1) = p_1$ (probabilité du résultat e_1), $P(e_2) = p_2$ (probabilité du résultat e_2)…
On dira que l'expérience aléatoire est **modélisée** par la loi de probabilité P.

④ Interprétation

p_i est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que le résultat e_i a de se réaliser.

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Déterminer une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \log_a\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

2°) On suppose dans cette question que a est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On pose $E = \{1, 2, \dots, a-1\}$ (on peut écrire $E = [\![1\,;\,a-1]\!]$).
Pour tout entier naturel $k \in E$, on pose $p_k = \log_a\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.
Démontrer que $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{a-1})$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble E.

Remarque :

Dans le cas où $a = 10$, on obtient une loi de probabilité sur $E = [\![1\,;\,9]\!]$ appelée **loi de Benford** qui se retrouve dans diverses situations.
Ainsi, si l'on relève 1000 nombres entiers naturels dans un journal (les cours de la bourse, par exemple) et que l'on relève le premier chiffre de chacun de ces nombres, on s'aperçoit que la distribution des fréquences de chaque premier chiffre est assez proche de celle de la loi de Benford.
Il en serait de même en relevant le premier chiffre du nombre d'habitants des 35 560 communes de France !