T spé

Interrogation écrite du vendredi 15 avril 2022

30 minutes

Prénom et nom : ……………………………………………

Numéro : ……… **Note :** ……. **/ 20**

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 + \ln x$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

1°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Compléter la phrase ci-dessous :

Les antécédents de 0 par f sont …………………….. .

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère l'équation différentielle $y' = 3 - y$ (E).

1°) Recopier et compléter la phrase ci-dessous :

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par …………………...

………………….…… .

2°) Déterminer l'expression de la fonction f, solution de (E) telle que $f(\ln 2) = \dfrac{1}{2}$.

……………………………….. (une seule égalité)

III. (2 points : 1 point + 1 point)

Quelle est l'image de l'intervalle $]0\,;1]$ par la fonction logarithme népérien ? ……….

Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle ? ……….

IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2\ln x$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	1	$+\infty$

1°) Soit k un réel supérieur ou égal à 1. On pose $J = \left]0\,;1\right]$.
Démontrer qu'il existe un unique réel dans J dont l'image par f est égale à k.

....

....

....

....

....

....

2°) Quelle est l'image de I par f ? ....

3°) Dans cette question, on suppose que k est un réel fixé quelconque.
Donner sans justifier le nombre d'antécédents de k dans I par f.

....

....

....

....

V. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2(\ln x)^2 - 1$ définie sur l'intervalle $I = \left]0\,;+\infty\right[$.
Démontrer que f admet un minimum global sur I, que l'on déterminera, sans utiliser la dérivée (ni les variations de f sur I).

....

....

....

....

....

VI. (1 point)

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 15-4-2022

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 + \ln x$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

1°) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

On a $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ donc on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

On effectue une réécriture pour lever la forme indéterminée.

$\forall x \in I \quad f(x) = \ln x(\ln x + 1)$ (on effectue une factorisation)

On sait que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite de référence) donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\ln x + 1) = -\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

On peut aussi passer par la composée.

2°) Compléter la phrase ci-dessous :

Les antécédents de 0 par f sont 1 et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On cherche à résoudre dans I l'équation $f(x) = 0 \quad (1)$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \ln x(\ln x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = -1 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \mathrm{e}^{-1} \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

On retient les deux solutions car elles sont toutes les deux dans I.

II.

On considère l'équation différentielle $y' = 3 - y \quad (\mathrm{E})$.

1°) Recopier et compléter la phrase ci-dessous :

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 3$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-x} + 3$ $(k \in \mathbb{R})$.

2°) Déterminer l'expression de la fonction f, solution de (E) telle que $f(\ln 2) = \dfrac{1}{2}$.

On cherche le réel k tel que $f(\ln 2) = \dfrac{1}{2} \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{-\ln 2}+3=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-3$$

$$\Leftrightarrow k\times\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow k\times\frac{1}{\cancel{2}}=-\frac{5}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow k=-5$$

On peut aussi commencer par calculer à part $f(\ln 2)$.

$$f(\ln 2)=k\mathrm{e}^{-\ln 2}+3$$

$$=k\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}}+3$$

$$=\frac{k}{2}+3$$

La solution de (E) vérifiant la condition donnée est la fonction f définie par $f(x)=3-5\mathrm{e}^{-x}$.

III.

Quelle est l'image de l'intervalle $]0\,;1]$ par la fonction logarithme népérien ? $]-\infty\,;0]$

Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle ? $]0\,;+\infty[$

Les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont continues respectivement sur $]0\,;+\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.

On dresse leurs tableaux de variations avec les limites.
Les deux fonctions sont strictement croissantes.
On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée.

IV.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^2-2\ln x$ définie sur l'intervalle $I=]0\,;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1°) Soit k un réel supérieur ou égal à 1. On pose $J=]0\,;1]$.
Démontrer qu'il existe un unique réel dans J dont l'image par f est égale à k.

On applique la méthode des « 3 C ».

C_1 : f est continue sur I (par propriété sur les fonctions continues :
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur I ;
La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur I donc la fonction $x \mapsto -2\ln x$ est aussi continue sur I.
Par somme, f est continue sur I.)
Elle est donc continue sur J par restriction.

C_2 : D'après le tableau de variations de *f*, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$ (aisément calculable). Comme $k \geqslant 1$ par hypothèse, *k* appartient à l'intervalle défini par la limite de *f* en 0^+ et l'image de 1 par *f*, c'est-à-dire $[1\,;+\infty[$.
La condition C_2 est une valeur intermédiaire (dans un sens général).
k se positionne sur la flèche descendante du tableau de variations.

C_3 : D'après le tableau de variations, *f* est strictement décroissante sur *J*.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, il existe un unique réel dans *J* dont l'image par *f* est égale à *k*.

C_1 et C_2 assurent l'existence ; C_3 assure l'unicité.

2°) Quelle est l'image de *I* par *f* ? $[1\,;+\infty[$

On répond sous la forme d'un intervalle.

3°) Dans cette question, on suppose que *k* est un réel fixé quelconque.
Donner sans justifier le nombre d'antécédents de *k* dans *I* par *f*.

On fait une discussion sur *k* en distinguant 3 cas.

Pour cela, on utilise le tableau de variations.
On peut aussi se référer à la représentation graphique de *f*.

1^er^ cas : $k > 1$
k admet deux antécédents par *f* dans *I* (l'un dans l'intervalle $]0\,;1[$, l'autre dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$).

2^e^ cas : $k = 1$
1 admet 1 pour seul antécédent par *f* dans *I*.

3^e^ cas : $k < 1$
k n'admet aucun antécédent par *f* dans *I*.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2(\ln x)^2 - 1$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.
Démontrer que *f* admet un minimum global sur *I*, que l'on déterminera, sans utiliser la dérivée (ni les variations de *f* sur *I*).

On raisonne en deux temps.

1. On démontre que *f* est minorée sur *I* et on trouve un minorant (le meilleur possible !).
2. On démontre que ce minorant est atteint.

On procède par inégalités successives.

1. On part de l'inégalité : $\forall x \in I \quad (\ln x)^2 \geqslant 0$.
En multipliant les deux membres de cette inégalité par 2, on obtient $\forall x \in I \quad 2(\ln x)^2 \geqslant 0$ (l'inégalité ne change pas de sens puisque 2 est strictement positif).

En ajoutant – 1 aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient $\forall x \in I \quad 2(\ln x)^2 - 1 \geqslant -1$ (l'inégalité ne change pas de sens)
soit $\forall x \in I \quad f(x) \geqslant -1$.

On a donc démontré que *f* est minorée sur *I* et que – 1 est un minorant de *f* sur *I*.

2. On observe que $f(1) = 2(\ln 1)^2 - 1 = 2 \times 0^2 - 1 = -1$.

On en déduit que *f* admet – 1 pour minimum global sur *I*, atteint pour $x = 1$.

On peut aussi résoudre l'équation $f(x) = -1$, ce qui montrera que 1 est la seule valeur en laquelle le minimum est atteint.

On vérifie le résultat en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

Rappel de la définition d'une fonction majorée, minorée, bornée

f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

● On dit que f est **majorée** sur D pour exprimer qu'il existe un réel M tel que $\forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$ (M est un **majorant** de la fonction).

● On dit que f est **minorée** sur D pour exprimer qu'il existe un réel m tel que $\forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$ (m est un **minorant** de la fonction).

● On dit que f est **bornée** pour exprimer qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$.

VI.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$I = \left[\ln\left(e^x + 1\right) \right]_0^{\ln 5}$ (barres de valeur absolue inutile)

$= \ln\left(e^{\ln 5} + 1\right) - \ln\left(e^0 + 1\right)$

$= \ln 6 - \ln 2$

$= \ln \dfrac{6}{2}$

$= \ln 3$

On vérifie le calcul grâce à la calculatrice.