**T exp**

# Interrogation écrite du lundi 11 avril 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

**Numéro : …..** **Prénom et nom :** ………………….……………………………….

**Note : ….. / 20**

---

**I. (5 points : 1°) 1 point + 2 points ; 2°) 2 points)**

1°) Quel est le PPCM de 54 et 84 ? Quel est le plus petit multiple commun à 54 et 84 supérieur ou égal à 2022 ?
2°) Quel est le plus petit entier naturel non nul divisible à la fois par tous les entiers naturels de 1 à 12 ?

1°) ………… …..…………….. 2°) …………………………………………..

---

**II. (4 points)**

Deux frères, Tim et Tom, décident de s'entraîner à la course à pied afin de préparer un cross. Ils se rendent tous les deux dans un parc mais choisissent d'effectuer des circuits différents. Tim effectue des boucles sur un circuit de 364 mètres et Tom parcourt des boucles sur un circuit de 294 mètres.
Déterminer le nombre de tours entiers minimum que devra effectuer Tim et le nombre de tours entiers minimum que devra effectuer Tom pour que les deux frères aient parcouru au final la même distance.
Préciser alors quelle sera la distance courue par chacun.

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

---

**III. (3 points)**

Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. On pose $x = ab$ et $y = a^2b + ab^2$.
Déterminer le PGCD de $x$ et $y$.

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

……………………………………………………………………………………….……………………

## IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs premiers entre eux.

1°) Dans cette question, on se propose de démontrer que $a+b$ et $ab$ sont premiers entre eux.
D'après l'identité de Bezout, il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au+bv=1 \quad (1)$.
Vérifier au brouillon que l'on a alors $(a+b)\left(au^2+bv^2\right)-ab(u-v)^2=1 \quad (2)$.
En déduire que $a+b$ et $ab$ sont premiers entre eux. On justifiera la réponse avec soin.

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

2°) On suppose de plus, dans cette question, que $a$ et $b$ sont non nuls. On pose $x=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
Quelle est l'écriture sous forme de fraction irréductible de $x$ ? On justifiera avec soin.

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

---

## V. (4 points)

Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Soit $n$ un entier naturel non nul.
On pose $x=a^n b$ et $y=ab^n$.
Calculer le PGCD et le PPCM de $x$ et $y$ en fonction de $a$, $b$, $n$.

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

# Corrigé de l'interrogation écrite du 11-4-2022

**I.**

1°) Quel est le PPCM de 54 et 84 ? Quel est le plus petit multiple commun à 54 et 84 supérieur ou égal à 2022 ?
2°) Quel est le plus petit entier naturel non nul divisible à la fois par tous les entiers naturels de 1 à 12 ?

1°) 756 2268 2°) 27720

1°)

Pour déterminer le PPCM de 54 et 84, le plus rapide est d'utiliser la calculatrice.

Pour déterminer le plus petit multiple commun à 54 et 84 supérieur ou égal à 2022, on cherche le plus petit multiple de 756 supérieur ou égal à 2022 (on utilise une propriété du cours).

2°) On cherche le PPCM de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
On utilise la calculatrice directement lcm(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12).
On peut éventuellement grouper les entiers par deux.
Nous verrons plus tard une méthode rapide utilisant la décomposition en facteurs premiers.

---

**II.**

Deux frères, Tim et Tom, décident de s'entraîner à la course à pied afin de préparer un cross. Ils se rendent tous les deux dans un parc mais choisissent d'effectuer des circuits différents. Tim effectue des boucles sur un circuit de 364 mètres et Tom parcourt des boucles sur un circuit de 294 mètres.
Déterminer le nombre de tours entiers minimum que devra effectuer Tim et le nombre de tours entiers minimum que devra effectuer Tom pour que les deux frères aient parcouru au final la même distance.
Préciser alors quelle sera la distance courue par chacun.

On cherche le PPCM de 364 et 294.
Grâce à la calculatrice, on trouve 7644.
La distance courue par chacun sera de 7644 m.

$\frac{7644}{364} = 21$ et $\frac{7644}{294} = 26$

Tim effectuera 21 tours et Tom effectuera 26 tours.

---

**III.**

Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls. On pose $x = ab$ et $y = a^2b + ab^2$.
Déterminer le PGCD de $x$ et $y$.

On a $y = ab(a+b) = x(a+b)$.
Comme $a$ et $b$ sont des entiers naturels, $a+b$ est aussi un entier naturel.
On peut donc dire que $x \mid y$.
On en déduit que $\text{PGCD}(x\,;y) = x$ (propriété du cours) soit $\text{PGCD}(x\,;y) = ab$.

**IV.**

Soit *a* et *b* deux entiers relatifs premiers entre eux.

1°) Dans cette question, on se propose de démontrer que $a+b$ et *ab* sont premiers entre eux.
D'après l'identité de Bezout, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $au+bv=1 \quad (1)$.

Vérifier au brouillon que l'on a alors $(a+b)\left(au^2+bv^2\right)-ab(u-v)^2=1 \quad (2)$.
En déduire que $a+b$ et *ab* sont premiers entre eux. On justifiera la réponse avec soin.

On développe l'expression $(a+b)\left(au^2+bv^2\right)-ab(u-v)^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)\left(au^2+bv^2\right)-ab(u-v)^2 &= a^2u^2+abv^2+abu^2+b^2v^2-ab\left(u^2+v^2-2uv\right)\\ &= a^2u^2+\cancel{abv^2}+\cancel{abu^2}+b^2v^2-\cancel{abu^2}-\cancel{abv^2}+2abuv\\ &= a^2u^2+b^2v^2+2abuv\\ &= (au+bv)^2\\ &= 1^2 \quad (\text{car } au+bv=1 \text{ d'après l'égalité } (1))\\ &= 1\end{aligned}$$

Posons $u'=au^2+bv^2$ et $v'=-(u-v)^2$.

L'égalité $(2)$ s'écrit donc $(a+b)u'+abv'=1 \quad (2')$.
Comme *a*, *b*, *u*, *v* sont des entiers relatifs, on en déduit que $u'$ et $v'$ sont des entiers relatifs.

L'égalité $(2')$ nous donne une combinaison linéaire de $a+b$ et *ab* à coefficients entiers relatifs dont le résultat est égal à 1.

On en déduit que $a+b$ et *ab* sont premiers entre eux (il s'agit du sens facile du théorème de Bezout).

2°) On suppose de plus, dans cette question, que *a* et *b* sont non nuls. On pose $x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.
Quelle est l'écriture sous forme de fraction irréductible de *x* ? On justifiera avec soin.

On a $x=\frac{a+b}{ab}$.
D'après la question précédente, $a+b$ et *ab* sont premiers entre eux.

On a donc l'écriture de *x* en fraction irréductible.

## V.

Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Soit $n$ un entier naturel non nul.
On pose $x = a^n b$ et $y = ab^n$.
Calculer le PGCD et le PPCM de $x$ et $y$ en fonction de $a$, $b$, $n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{PGCD}(x\,;y) &= \mathrm{PGCD}\left(a^n b\,;ab^n\right)\\
&= \mathrm{PGCD}\left(ab\times a^{n-1}\,;ab\times b^{n-1}\right)\\
&= ab\mathrm{PGCD}\left(a^{n-1}\,;b^{n-1}\right)
\end{aligned}$$
(car $a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls donc $ab$ est un entier naturel non nul)

Or $a$ et $b$ sont premiers entre eux par hypothèse donc $a^{n-1}$ et $b^{n-1}$ sont premiers entre eux (propriété du cours).

On en déduit que $\mathrm{PGCD}(x\,;y) = ab$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{PPCM}(x\,;y) &= \mathrm{PPCM}\left(a^n b\,;ab^n\right)\\
&= \mathrm{PPCM}\left(ab\times a^{n-1}\,;ab\times b^{n-1}\right)\\
&= ab\mathrm{PPCM}\left(a^{n-1}\,;b^{n-1}\right)
\end{aligned}$$
(car $a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls donc $ab$ est un entier naturel non nul)

Or $a$ et $b$ sont premiers entre eux par hypothèse donc $a^{n-1}$ et $b^{n-1}$ sont premiers entre eux (propriété du cours).
On en déduit que $\mathrm{PPCM}(x\,;y) = ab\times a^{n-1}b^{n-1} = a^n b^n$.