TS2 Contrôle N°3 (4 heures) du samedi 2 décembre 2006

Consignes :

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Il est demandé de soigner particulièrement l'orthographe, la présentation et la rédaction ; on n'oubliera pas en particulier d'encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.
L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.
À la fin de l'épreuve, il est demandé de ne pas joindre l'énoncé dans la copie mais de le garder.

I. (5 points)

1°) Soit *f* la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.
Étudier la dérivabilité de *f* à droite en 0.

2°) Soit *u* et *v* deux fonctions définies sur un intervalle *I* non vide et non réduit à un singleton. Soit x_0 un réel appartenant à *I*.
On sait que l'implication « Si *u* est dérivable en x_0 et *v* est dérivable en x_0, alors *uv* est dérivable en x_0 ».
Refaire la démonstration de ce résultat en veillant à tout bien justifier.
On pourra utiliser l'égalité suivante pour tout *x* dans *I* distinct de x_0 :

$$\frac{uv(x) - uv(x_0)}{x - x_0} = u(x)\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} + v(x_0)\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

3°) L'implication « Si *uv* est dérivable en x_0, alors *u* est dérivable en x_0 ou *v* est dérivable en x_0 » est-elle vraie ? Justifier.

II. (5 points) Q.CM.

Pour chaque question, il y a une seule réponse valable.
Chaque réponse juste rapporte 1 point ; chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse n'enlève aucun point ni n'ajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On considère la suite *u* définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ pour tout entier naturel *n* non nul.

1°) A : *f* est décroissante sur I. B : *f* est croissante sur I. C : *f* n'est pas monotone sur I.

2°) A : *f* est à valeurs positives sur I. B : *f* est à valeurs négatives sur I. C : *f* n'a pas un signe constant sur I.

3°) A : *u* est décroissante. B : *u* est croissante. C : *u* n'est pas monotone.

4°) A : *u* est arithmétique. B : *u* est géométrique. C : *u* n'est ni arithmétique ni géométrique.

5°) Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Alors, pour tout entier naturel *n* non nul, S_n est égale à

A : $n\frac{u_1 + u_n}{2}$ B : $-\ln(n+1)$ C : $(n+1)\frac{u_1 + u_n}{2}$.

III. (5 points)

On considère deux fonctions *f* et *g* définies sur l'intervalle $I=[0\,;1]$ qui vérifient les hypothèses H_1, H_2 et H_3 suivantes :

H_1 : *f* et *g* sont dérivables sur *I*.

H_2 : Pour tout réel $t\in I$, on a : $[f(t)]^2+[g(t)]^2=1 \quad (1)$.

H_3 : On a $f(0)=g(1)=0 \quad (2)$ et $f(1)=g(0)=1 \quad (3)$.

1°) Donner un couple de fonctions (f,g) vérifiant H_1, H_2, H_3.

Dans toute la suite, on considère un couple (f,g) quelconque de fonctions vérifiant H_1, H_2, H_3 et l'on se propose de déterminer quelques propriétés de *f* et *g*.

2°) a) Démontrer que pour tout réel $t\in I$, on a : $f(t)f'(t)+g(t)g'(t)=0$.

Indication : On pourra calculer la dérivée de la fonction φ définie par $\varphi(t)=[f(t)]^2+[g(t)]^2$.

b) Déterminer $f'(1)$ et $g'(0)$.

3°) On considère la fonction *h* définie sur *I* par $h(t)=g(t)-f(t)$.

a) Justifier que *h* est continue sur *I* et démontrer que *h* s'annule au moins une fois sur *I*. On pourra considérer $h(0)$ et $h(1)$.

b) Que peut-on en déduire pour les représentations graphiques de *f* et *g* dans le plan muni d'un repère ?

IV. (5 points)

Pour tout réel *m* strictement positif, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+m\mathrm{e}^{-x}\right)$ et l'on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$. Sur le graphique en bas de cette page, on donne les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{16}$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$.

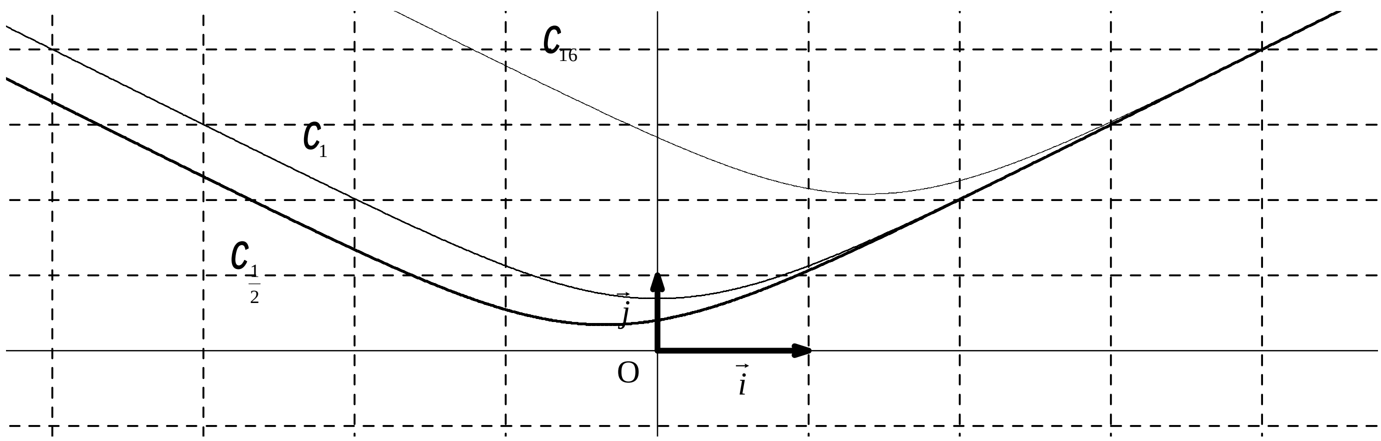
Le graphique conduit à formuler les conjectures suivantes que l'on va démontrer dans l'exercice.

C_1 : Les fonctions f_m possèdent un minimum global sur $\mathbb{R}$.

C_2 : Les courbes $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote oblique Δ indépendante de *m* en + ∞.

C_3 : Les courbes $\mathcal{C}_m$ admettent une asymptote oblique en – ∞.

C_4 : Les courbes $\mathcal{C}_m$ se déduisent toutes de $\mathcal{C}_1$ par une translation.



1°) **Conjecture C_1**

Justifier la dérivabilité de f_m et calculer $f_m'(x)$. Démontrer que f_m admet un minimum global sur $\mathbb{R}$; donner sa valeur en fonction de m et préciser pour quelle valeur de x il est obtenu.

2°) **Conjecture C_2**

Démontrer que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote oblique Δ indépendante de m en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à Δ.

3°) **Conjecture C_3**

Démontrer que $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote oblique en $-\infty$.

4°) **Conjecture C_4**

Démontrer que $\mathcal{C}_m$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{\ln m}{2} \,;\, \dfrac{\ln m}{2}\right)$.