T exp

Interrogation écrite du lundi 28 mars 2022

30 minutes

Numéro : …..

……………………..……………………………

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'entier naturel dont l'écriture en base deux ne comporte que le chiffre 1 écrit n fois : $u_n = \overline{11...1}^{(\text{deux})}$.

1°) Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n (sans symbole Σ). On répondra par une égalité.

………………………………

2°) Démontrer que u_{2022} est divisible par 7.
On utilisera les congruences en observant que $2^3 \equiv \ldots$ (mod. 7).

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

II. (3 points)

On admet ci-dessous les résultats suivants donnant les congruences de 5^n et 4^n modulo 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
Dans les deux tableaux, k est un entier naturel.

Si $n = \ldots$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
Alors $5^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	5	4	6	2	3

Si $n = \ldots$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
Alors $4^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	4	2

On note E l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n + 4^n + 2 \equiv 0$ (mod. 7).

Compléter la phrase suivante :

E est l'ensemble des entiers naturels de la forme ………… avec $k \in \mathbb{N}$.

III. (2 points)

Un son complexe est composé d'une harmonique A de fréquence 440 hertz, d'une harmonique B de fréquence 520 hertz et d'une harmonique C de fréquence 780 hertz. On admet que la fréquence de ce son est égale au PGCD des fréquences des harmoniques.
Quelle est la fréquence de ce son complexe ?

…………

IV. (3 points)

Déterminer le PGCD de 858 et 910 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

....

....

....

....

V. (3 points)

Soit n un entier naturel.
Déterminer en justifiant le PGCD de 2^n et de 4^n.

....

....

....

....

....

....

VI. (4 points)

Soit x et y deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 vérifiant les conditions suivantes :

(C_1) : x et y sont premiers entre eux ;

(C_2) : x divise $3y$;

(C_3) : y divise $2x$.

Déterminer les valeurs de x et y en justifiant.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 28-3-2022

I.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n l'entier naturel dont l'écriture en base deux ne comporte que le chiffre 1 écrit n fois : $u_n = \overline{11...1}^{(\text{deux})}$.

1°) Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n (sans symbole Σ). On répondra par une égalité.

$$u_n = 2^n - 1$$

2°) Démontrer que u_{2022} est divisible par 7.
On utilisera les congruences en observant que $2^3 \equiv \ldots$ (mod. 7).

On a $u_{2022} = 2^{2022} - 1$.

On observe d'abord que $2^3 \equiv 1$ (mod. 7).

Or 2022 est divisible par 3 car $2022 = 3 \times 674$.

On peut écrire $\left(2^3\right)^{674} \equiv 1^{674}$ (mod. 7) soit $2^{2022} \equiv 1$ (mod. 7).

On en déduit que u_{2022} est divisible par 7.

II.

On admet ci-dessous les résultats suivants donnant les congruences de 5^n et 4^n modulo 7 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
Dans les deux tableaux, k est un entier naturel.

Si $n = \ldots$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
Alors $5^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	5	4	6	2	3

Si $n = \ldots$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
Alors $4^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	4	2

On note E l'ensemble des entiers naturels n tels que $5^n + 4^n + 2 \equiv 0$ (mod. 7).

Compléter la phrase suivante :

E est l'ensemble des entiers naturels de la forme $6k+5$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On dresse un seul tableau de congruences :

$n = \ldots$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	5	4	6	2	3
$4^n \equiv \ldots$ (mod. 7)	1	4	2	1	4	2
$5^n + 4^n + 2 \equiv \ldots$ (mod. 7)	4	4	1	2	1	0

On observe au préalable que :
tout nombre de la forme $6k$ avec $k \in \mathbb{N}$ est aussi un nombre de la forme $3l$ ($l \in \mathbb{N}$) ;
tout nombre de la forme $6k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ est aussi un nombre de la forme $3l+1$ ($l \in \mathbb{N}$) ;
tout nombre de la forme $6k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$ est aussi un nombre de la forme $3l+2$ ($l \in \mathbb{N}$) ;
etc.

III.

Un son complexe est composé d'une harmonique A de fréquence 440 hertz, d'une harmonique B de fréquence 520 hertz et d'une harmonique C de fréquence 780 hertz. On admet que la fréquence de ce son est égale au PGCD des fréquences des harmoniques.
Quelle est la fréquence de ce son complexe ?

20 Hz

On doit calculer le PGCD de 440, 520 et 780.

On peut utiliser la calculatrice Numworks directement en tapant les trois nombres si elle est mise à jour : gcd(440,520,780).

Sinon, on commence par calculer $\text{PGCD}(440\,;520)=40$ puis $\text{PGCD}(40\,;780)=20$.
On utilise la propriété d'associativité du PGCD (on calcule d'abord le PGCD de deux entiers puis ensuite le PGCD du résultat avec le dernier entier).
On se sert de la calculatrice pour gagner du temps.

IV.

Déterminer le PGCD de 858 et 910 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$910 = 858 \times 1 + 52$

$858 = 52 \times 16 + 26$

$52 = 26 \times 2 + 0$

On en déduit que $\text{PGCD}(858\,;910)=26$ (dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide).

V.

Soit n un entier naturel.
Déterminer en justifiant le PGCD de 2^n et de 4^n.

On a $4^n = \left(2^2\right)^n = 2^{2n} = 2^n \times 2^n$.

2^n divise donc 4^n et par suite, $\text{PGCD}\left(2^n\,;4^n\right)=2^n$.

VI.

Soit x et y deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 vérifiant les conditions suivantes :
(C_1) : x et y sont premiers entre eux ;
(C_2) : x divise $3y$;
(C_3) : y divise $2x$.
Déterminer les valeurs de x et y en justifiant.

On utilise les conditions (C_1) et (C_2).
D'après le théorème de Gauss, on peut affirmer que x divise 3.
Or les diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3.

Comme $x \geqslant 2$, on en déduit que $x = 3$.

On utilise les conditions (C_1) et (C_3).
D'après le théorème de Gauss, on peut affirmer que y divise 2.
Or les diviseurs positifs de 2 sont 1 et 2.
Comme $y \geqslant 2$, on en déduit que $y = 2$.

On a donc $x = 3$ et $y = 2$.

On vérifie que les conditions (C_1), (C_2), (C_3) sont bien remplies.