T spé

Interrogation écrite du vendredi 11 mars 2022

30 minutes

Prénom et nom : …………………………………………….

Numéro : ………   **Note :** ……. / 20

I. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - 3x$.

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

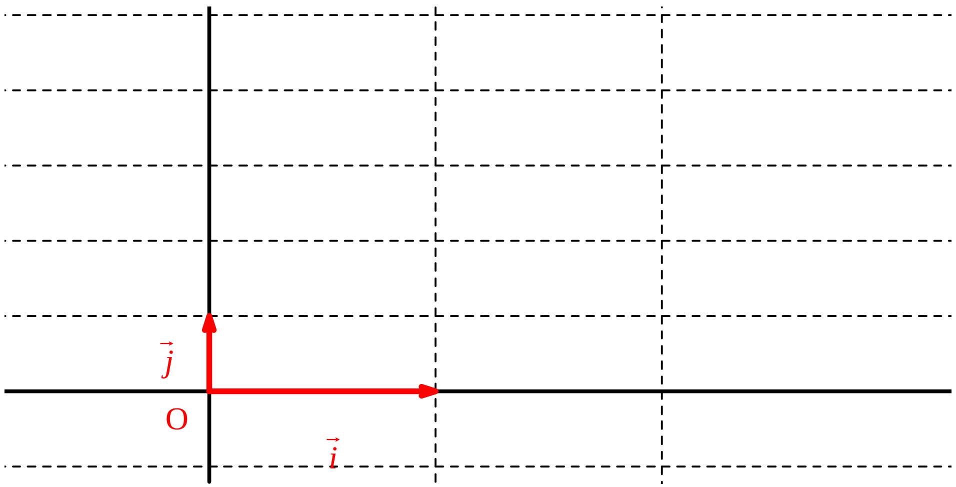
Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}(2\,;3)$ et le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;1)$.

On note D la droite passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
On note également D' la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de D.
2°) Déterminer l'abscisse du point B de D d'ordonnée 5.
3°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ?
Répondre par oui ou non dans le tableau.

1°)	2°)	3°)
	…	…..

Tracer D sur le graphique ci-dessous.



III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \; ; \; D'\begin{cases} x = t' \\ y = t'-1 \\ z = -t'+6 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

1°) Résoudre le système $\begin{cases} 2t-1 = t' & (1) \\ t = t'-1 & (2) \\ t+1 = -t'+6 & (3) \end{cases}$ en utilisant la calculatrice.

…………………………………………………………………………………

2°) En déduire que les droites D et D' sont sécantes en un point I dont on précisera les coordonnées.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

IV. (4 points)

Soit ABCDEFGH un cube. On rapporte l'espace au repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.
Pour chacune des questions 1°), 2°), 4°), trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point.
Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

Écrire le nom de la droite pour la question 3°).

1°) Pour tout réel λ, le point $\mathrm{M}(\lambda\,;\lambda\,;\lambda)$ appartient à la droite :

a. (AC) b. (BD) c. (AG)

2°) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ est orthogonal au vecteur :

a. $\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ b. $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ c. $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$

3°) Pour tout réel λ, le point $\mathrm{N}(\lambda\,;0\,;\lambda)$ appartient à la droite ….. .

4°) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est normal au plan :

a. (ABC) b. (BDE) c. (BDF)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)
Réponse				

V. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

L'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1°) Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon de la sphère S d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-x+3y-z-1=0$.

…………… ………

2°) Déterminer la distance du point $\mathrm{A}(4\,;-4\,;3)$ au plan $(x\mathrm{O}y)$ (plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$).

……………

On répondra sans écrire d'égalité.

Corrigé de l'interrogation écrite du 11-3-2022

I.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$.

Par passage à l'inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{(\ln x)^2} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

(on ne précise pas 0^+ car cela n'a pas d'intérêt puisque le résultat n'est pas utilisé dans la suite).

On peut aussi passer par une limite de composée.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\ln x}_{X} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{X^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - 3x$.

Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

On effectue une réécriture pour lever la forme indéterminée que l'on rencontre (forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ »).

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = x\left(2\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 3\right)$ (on force la factorisation)

On connaît la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 3\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc, par limite d'un produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

On vérifie le résultat de cette limite en traçant la courbe représentative de g sur l'écran de la calculatrice.

II.

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point $\mathrm{A}(2\,;3)$ et le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;1)$.

On note D la droite passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
On note également D' la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

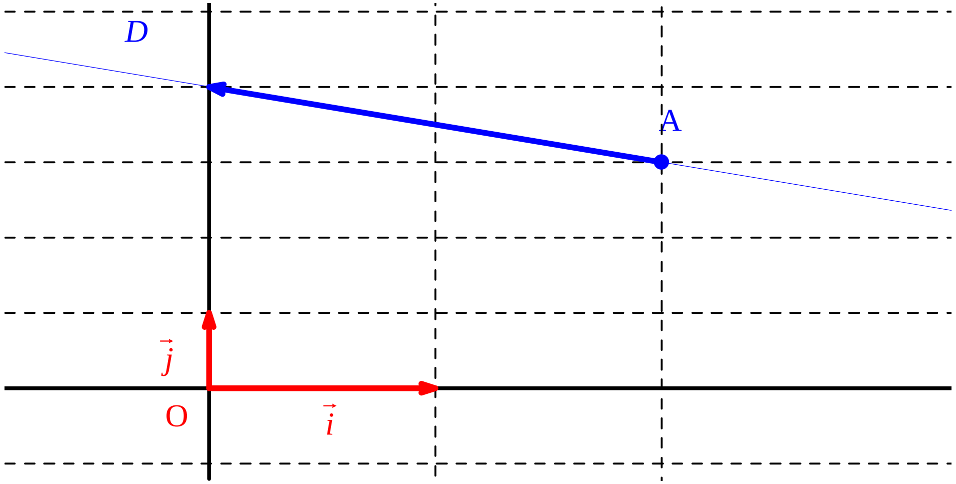
1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de D.
2°) Déterminer l'abscisse du point B de D d'ordonnée 5.
3°) Les droites D et D' sont-elles parallèles ?
Répondre par oui ou non dans le tableau.

1°)	2°)	3°)
$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$	-2	oui

Pour la question 2°), on sait que $y_B = 5$.
Le paramètre t associé à B sur la droite D (pour le système d'équations paramétriques établi à la question 1°) vérifie donc l'égalité $3+t=5$ ce qui donne immédiatement $t=2$.
On a donc $x_B = 2-2\times 2 = -2$.

Pour la question 3°), on dit que le vecteur $\vec{u}\,(-2\,;1)$ est un vecteur directeur de D et que le vecteur $\vec{v}\,(4\,;-2)$ est un vecteur directeur de D'.
On constate que $\vec{v} = -2\vec{u}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires ce qui permet d'affirmer que D et D' sont parallèles.

Tracer D sur le graphique ci-dessous.



On construit aisément le vecteur $\vec{u}$ en se rappelant que $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$.

III.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les droites D et D' définies par les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$D\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})\ ;\ D'\begin{cases} x = t' \\ y = t'-1 \\ z = -t'+6 \end{cases} \quad (t'\in\mathbb{R}).$$

1°) Résoudre le système $\begin{cases} 2t-1 = t' & (1) \\ t = t'-1 & (2) \\ t+1 = -t'+6 & (3) \end{cases}$ en utilisant la calculatrice.

Avec la calculatrice, on obtient $t = 2$ et $t' = 3$.

On peut aussi résoudre très facilement le système par le calcul.

2°) En déduire que les droites D et D' sont sécantes en un point I dont on précisera les coordonnées.

On en déduit que les droites D et D' sont sécantes au point I associé au paramètre $t = 2$ dans le système d'équations qui définit D et au paramètre $t' = 3$ dans le système d'équations qui définit D'.
Par simple calcul, on obtient $\mathrm{I}(3\,;2\,;3)$.

IV.

Soit ABCDEFGH un cube. On rapporte l'espace au repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.
Pour chacune des questions 1°), 2°), 4°), trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point.
Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.
Écrire le nom de la droite pour la question 3°).

1°) Pour tout réel λ, le point $M(\lambda\,;\lambda\,;\lambda)$ appartient à la droite :

a. (AC) b. (BD) c. (AG)

2°) Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal au vecteur :

a. $\overrightarrow{FH}$ b. $\overrightarrow{AG}$ c. $\overrightarrow{CH}$

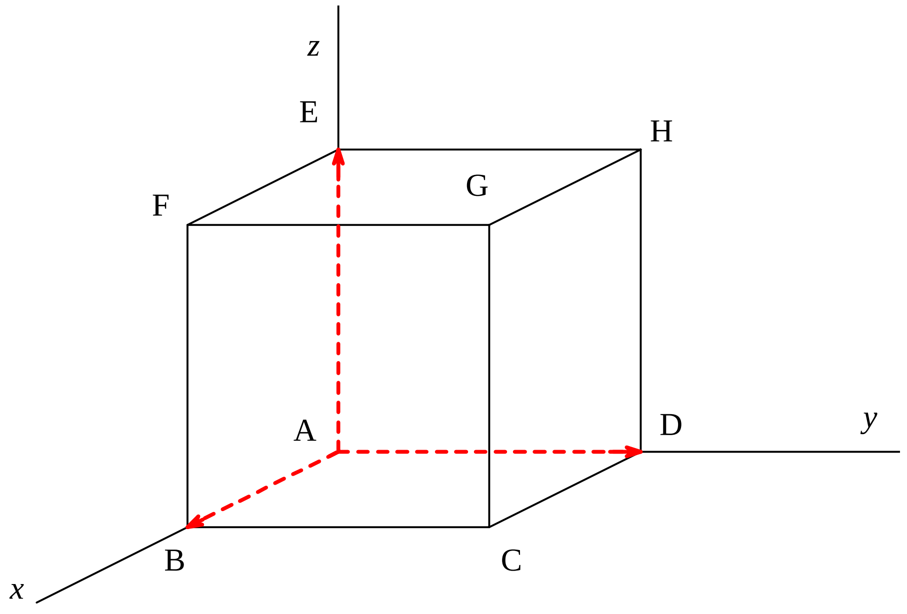
3°) Pour tout réel λ, le point $N(\lambda\,;0\,;\lambda)$ appartient à la droite ….. .

4°) Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan :

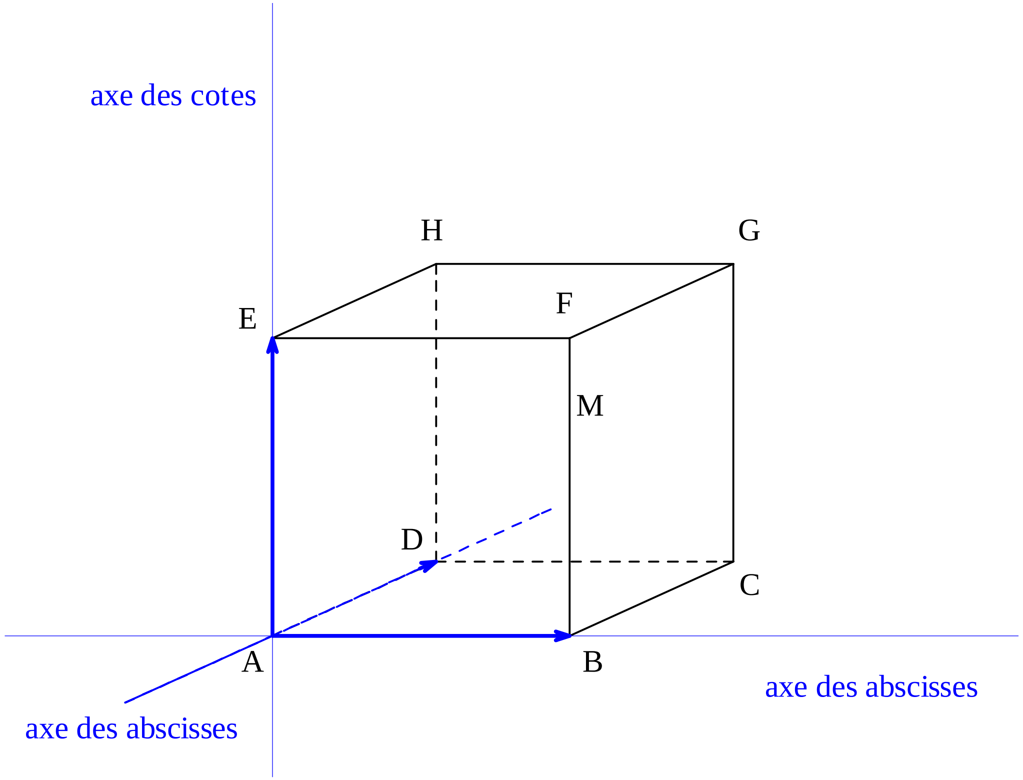
a. (ABC) b. (BDE) c. (BDF)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	
Réponse	c	a	(AF)	c	

On fait une figure assez grande représentant le cube en perspective cavalière.
On respecte les conventions de tracés, notamment les pointillés.



D'autres représentations en perspectives sont possibles, par exemple en prenant ABFE pour face frontale.



$A\left|\begin{array}{l}0\\0\\0\end{array}\right.$ $B\left|\begin{array}{l}1\\0\\0\end{array}\right.$ $C\left|\begin{array}{l}1\\1\\0\end{array}\right.$ $D\left|\begin{array}{l}0\\1\\0\end{array}\right.$ $E\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right.$ $F\left|\begin{array}{l}1\\0\\1\end{array}\right.$ $G\left|\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}\right.$ $H\left|\begin{array}{l}0\\1\\1\end{array}\right.$

1°) $M\left|\begin{array}{l}x_M=\lambda\\y_M=\lambda\\z_M=\lambda\end{array}\right.$

On se réfère aux systèmes d'équations paramétriques de droites dans l'espace.

On écrit $\begin{cases}x_M=0+\lambda\times 1\\y_M=0+\lambda\times 1\\z_M=0+\lambda\times 1\end{cases}$.

M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\left|\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}\right.$.

On a $\vec{u}=\overrightarrow{AG}$.

M appartient donc à la droite (AG).

On peut aussi écrire directement que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AG}$.

Une mauvaise méthode mais qui permet de choisir entre les différentes droites proposées celle qui convient consiste à choisir deux valeurs différentes de λ.

Pour $\lambda=0$, $M=A$.
Pour $\lambda=1$, $M=G$.

2°) On a $(AE)\perp(FH)$ donc le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{FH}$.

3°) Pour tout réel λ, le point $N(\lambda\,;0\,;\lambda)$ appartient à la droite ….. .

3°) Pour tout réel λ, le point $N(\lambda\,;0\,;\lambda)$ appartient à la droite ….. .

On a $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AF}$ donc pour tout réel λ, le point $N(\lambda\,;0\,;\lambda)$ appartient à la droite (AF).

On peut aussi utiliser la mauvaise méthode qui consiste à choisir deux valeurs différentes de λ.

Pour $\lambda=0$, $N=A$.

Pour $\lambda=1$, $N=F$.

4°) On a $(AC)\perp(BDF)$ donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (BDF).

Le plan (BDF) est un plan « transversal » du cube.

V.

L'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1°) Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon de la sphère S d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-x+3y-z-1=0$.

$\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ $\qquad\qquad$ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$.

$\mathrm{M}\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x+3y-z-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+y^2+3y+z^2-z-1=0$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré x^2-x, y^2+3y et z^2-z)

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$

On en déduit que S est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

2°) Déterminer la distance du point $\mathrm{A}\left(4\,;-4\,;3\right)$ au plan $\left(x\mathrm{O}y\right)$ (plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$).

On répondra sans écrire d'égalité.

On applique la formule donnant la distance d'un point à un plan de base dans un repère orthonormé.

Rappel :

La distance d'un point à un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

On a une propriété qui dit que c'est la plus petite distance entre ce point et un point quelconque du plan.

Dans un repère orthonormé, on sait que la distance d'un point au plan $\left(x\mathrm{O}y\right)$ est égale à la valeur absolue de sa cote.

Il n'y a pas de calcul à faire.

On peut écrire $\mathrm{d}\left(\mathrm{A},\left(x\mathrm{O}y\right)\right)=\left|\,z_{\mathrm{A}}\,\right|=\left|\,3\,\right|=3$.

On peut éventuellement faire un graphique en perspective sur lequel on place le point A et son projeté orthogonal $\mathrm{H}\left(4\,;-4\,;0\right)$.