T exp

Interrogation écrite du lundi 14 mars 2022

30 minutes

Numéro : ….. ……………………..……………………………

Note : ….. / 20

I. (9 points : 1 point ; 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse au reste de la division euclidienne de 5^n par 7 où n est un entier naturel.

Compléter la congruence suivante : $5^6 \equiv \ldots \pmod{7}$

On écrira le plus petit entier naturel possible.

1°) On suppose que n est de la forme $6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Quel est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 ? Justifier.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) On suppose que n est de la forme $6k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Même question.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) On suppose que n est de la forme $6k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$. Même question.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

4°) Donner sans justifier la valeur du reste de la division euclidienne de 5^n par 7 dans les autres cas. Écrire un cas par ligne.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le produit des n premiers entiers naturels impairs.

Compléter l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=0}^{k=\ldots\ldots\ldots} (\ldots\ldots\ldots)$

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère le polynôme

$P_n(x) = \prod_{k=0}^{k=n-1} (x+k)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exprimer $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de u_n et de n.

....

....

....

....

III. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère le nombre u_n dont l'écriture en base deux comporte n fois le chiffre 1 : $u_n = \overline{11...1}^{(2)}$, le chiffre 1 étant écrit n fois.

1°) Donner les écritures en base dix de $u_2 = \overline{11}^{(2)}$ et de $u_3 = \overline{111}^{(2)}$.

....

2°) Compléter l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{k=........} 2^k$.

Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n.

....

....

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) Compléter l'égalité : $\text{PGCD}(4365\,;819) = ...$.

2°) Si on effectue la division euclidienne de 4373 et 826 par un même entier naturel b non nul, on obtient 8 et 7 pour restes respectifs.

- Déterminer un minorant de b.
- Déterminer b.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé de l'interrogation écrite du 14-3-2022

I.

Dans cet exercice, on s'intéresse au reste de la division euclidienne de 5^n par 7 où n est un entier naturel.

Compléter la congruence suivante : $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$
On écrira le plus petit entier naturel possible.

1°) On suppose que n est de la forme $6k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Quel est le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 ? Justifier.

On reprend la congruence $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

En élevant à la puissance k les deux membres cette congruence, on obtient $\left(5^6\right)^k \equiv 1^k \pmod{7}$ soit $5^{6k} \equiv 1 \pmod{7}$ ou encore $5^n \equiv 1 \pmod{7}$.

Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est donc 1.

2°) On suppose que n est de la forme $6k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Même question.

On utilise $5^{6k} \equiv 1 \pmod{7}$.

En multipliant les deux membres cette congruence par 5, on obtient $5^{6k} \times 5 \equiv 1 \times 5 \pmod{7}$ soit $5^{6k+1} \equiv 5 \pmod{7}$ ou encore $5^n \equiv 5 \pmod{7}$.

Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est donc 5.

3°) On suppose que n est de la forme $6k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$. Même question.

On utilise $5^{6k+1} \equiv 5 \pmod{7}$.

En multipliant les deux membres cette congruence par 5, on obtient
$5^{6k+1} \times 5 \equiv 5 \times 5 \pmod{7}$ soit $5^{6k+2} \equiv 25 \pmod{7}$ d'où $5^n \equiv 4$ (mod. 7

Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est donc 4.

4°) Donner sans justifier la valeur du reste de la division euclidienne de 5^n par 7 dans les autres cas. Écrire un cas par ligne.

• Si n est de la forme $6k+3$ $(k \in \mathbb{N})$, alors le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est 6.

• Si n est de la forme $6k+4$ $(k \in \mathbb{N})$, alors le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est 2.

• Si n est de la forme $6k+5$ $(k \in \mathbb{N})$, alors le reste de la division euclidienne de 5^n par 7 est 3.

II.

1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le produit des n premiers entiers naturels impairs.

Compléter l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} (2k+1)$

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère le polynôme
$P_n(x) = \prod_{k=0}^{k=n-1} (x+k)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exprimer $P_n\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de u_n et de n.

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}+k\right)$$

$$=\prod_{k=0}^{k=n-1}\frac{2k+1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\prod_{k=0}^{k=n-1}(2k+1)$$

$$=\frac{1}{2^n}\times u_n$$

$$=\frac{u_n}{2^n}$$

Autre méthode :

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}+k\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+0\right)\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\times\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+0\right)\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}+n-2\right)\times\left(\frac{1}{2}+n-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\ldots\times\frac{2(n-2)+1}{2}\times\frac{2(n-1)+1}{2}$$

$$=\frac{u_n}{2^n}$$

III.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on considère le nombre u_n dont l'écriture en base deux comporte n fois le chiffre 1 : $u_n=\overline{11\ldots1}^{(2)}$, le chiffre 1 étant écrit n fois.

1°) Donner les écritures en base dix de $u_2=\overline{11}^{(2)}$ et de $u_3=\overline{111}^{(2)}$.

$u_2=\overline{3}^{(10)}$ $\qquad\qquad$ $u_3=\overline{7}^{(10)}$

$$u_2=1\times 2^1+1\times 2^0=2+1=\overline{3}^{(10)}$$

$$u_3=1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0=4+2+1=\overline{7}^{(10)}$$

On applique le principe pour passer d'un nombre écrit en binaire à un nombre écrit en base dix.

2°) Compléter l'égalité : $\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}2^k$.

Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n.

On applique la propriété suivante où q est un réel distinct de 1 :

$$\sum_{k=0}^{k=p}q^k=\frac{q^{p+1}-1}{q-1}.$$

$$u_n=\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$=2^n-1$$

IV.

1°) Compléter l'égalité : $\text{PGCD}(4365\,;819)=9$.

On utilise la calculatrice ou on écrit l'algorithme d'Euclide.

2°) Si on effectue la division euclidienne de 4373 et 826 par un même entier naturel b non nul, on obtient 8 et 7 pour restes respectifs.

● Déterminer un minorant de b.

● Déterminer b.

● Il s'agit d'obtenir une minoration de b (autre que $b>0$ pas intéressante).
On sait que, dans une division euclidienne, le reste est strictement inférieur au diviseur donc $b>7$ et $b>8$ ce qui donne finalement $b>8$.

8 est un minorant strict de b.

● On note q et q' les quotients respectifs des divisions euclidiennes de 4373 et de 826 par b.

On écrit les deux division euclidiennes : $4373=bq+8$ et $826=bq'+7$.

On a donc $bq=4373-8$ et $bq'=826-7$ soit $bq=4365$ et $bq'=819$.

b est donc un diviseur positif commun à 4365 et à 819.

Comme $\text{PGCD}(4365\,;819)=9$, les diviseurs positifs communs à 4365 et à 819 sont les diviseurs positifs de 9 c'est-à-dire 1, 3, 9.

Comme $b>8$, nécessairement $b=9$.

On vérifie que cette valeur de b convient.

On a en effet : $4373=9\times485+8$ et $826=9\times91+7$.