T exp

Interrogation écrite du lundi 7 mars 2022 (30 minutes)

- fiche
- calculatrice

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………….……………………………….

Note : ….. / 20

I. (3 points)

Soit n un entier naturel.
Compléter par le plus petit entier naturel la congruence suivante : $5^{6n} \equiv \ldots$ (mod. 7).
Justifier sur les lignes ci-dessous. On utilisera une démarche par déductions uniquement (pas d'équivalences).

………..

………..

………..

………..

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le produit des n premiers entiers naturels impairs.

1°) Calculer u_4.

2°) Compléter l'égalité : $u_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} (\ldots\ldots\ldots\ldots)$.

$u_4 = \ldots\ldots\ldots$

III. (4 points : 1 point + 1 point + 2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{Z}$ telle que l'image d'un entier relatif x quelconque est donnée par $f(x) = \frac{x}{3}$ si x est divisible par 3 et $f(x) = x - 1$ si x n'est pas divisible par 3.

Pour tout entier naturel n on pose $a_n = 10^n + 1$.

Compléter par le plus petit entier naturel la congruence suivante : $a_n \equiv \ldots$ (mod. 3).

Quelle est l'image de a_n par f ? ……

Écrire le(s) antécédent(s) de a_n par f. …………………….

IV. (2 points)

Compléter la fonction Python `mult(n)` qui prend pour argument un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et qui renvoie la liste des n premiers entiers naturels multiples de 3.

```
def mult(n):
    L=[....... for k in range .............]
    return L
```

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) On pose $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Compléter l'égalité : $A^{2022}=$.......................... .

2°) On pose $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Compléter l'égalité : $B^2=$..........................

Compléter alors, pour n entier naturel quelconque, l'égalité $B^{2n}=$.......................... puis $B^{2n+1}=$..........................

VI. (4 points1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère la matrice A carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) Calculer A^2 au brouillon et compléter l'égalité $A^2=\ldots A$.

2°) Soit U un vecteur colonne à n lignes tel que tous les coefficients sont nuls sauf deux, l'un égal à 1 et l'autre à – 1.
Calculer AU.

Corrigé de l'interrogation écrite du 7-3-2022

I.

Soit n un entier naturel.
Compléter par le plus petit entier naturel la congruence suivante : $5^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$.
Justifier sur les lignes ci-dessous. On utilisera une démarche par déductions uniquement (pas d'équivalences).

On a $5^{6n} = \left(5^6\right)^n$.

On va donc s'intéresser tout d'abord à 5^6.

On a $5^2 = 25$ donc $5^2 \equiv 4 \pmod{7}$.

En multipliant les deux membres de cette congruence par 5, on obtient $5^3 \equiv 4 \times 5 \pmod{7}$ soit $5^3 \equiv 20 \pmod{7}$ d'où $5^3 \equiv -1 \pmod{7}$.

En élevant au carré les deux membres de la congruence, on obtient $\left(5^3\right)^2 \equiv \left(-1\right)^2 \pmod{7}$ soit $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

On peut aussi retrouver ce résultat directement en calculant 5^6 à l'aide de la calculatrice (on obtient $5^6 = 15625$ ce qui permet d'écrire $15625 = 2232 \times 7 + 1$) ou même en utilisant directement la commande de la calculatrice permettant de déterminer un reste de division euclidienne.

Une variante de cette méthode consiste à écrire $5^6 - 1 = 15624$. Or 7 divise 15624…

On peut aussi partir de $5 \equiv -2 \pmod{7}$ donc $5^6 \equiv \left(-2\right)^6 \pmod{7}$ soit $5^6 \equiv 64 \pmod{7}$.
On a $64 \equiv 1 \pmod{7}$.

En multipliant les deux membres de cette congruence par 5, on obtient $5^3 \equiv 4 \times 5 \pmod{7}$ soit $5^3 \equiv 20 \pmod{7}$ d'où $5^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
En élevant à la puissance n les deux membres de la dernière congruence, on obtient $\left(5^6\right)^n \equiv 1^n \pmod{7}$ soit $5^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$.

Attention, on ne peut pas se contenter d'exemples en prenant des valeurs particulières de n.

II.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le produit des n premiers entiers naturels impairs.

1°) Calculer u_4.

2°) Compléter l'égalité : $u_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} \left(2k+1\right)$.

$u_4 = 105$

$u_4 = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 15 \times 7 = 105$

III.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{Z}$ telle que l'image d'un entier relatif x quelconque est donnée par $f(x)=\frac{x}{3}$ si x est divisible par 3 et $f(x)=x-1$ si x n'est pas divisible par 3.

Pour tout entier naturel n on pose $a_n=10^n+1$.

Compléter par le plus petit entier naturel la congruence suivante : $a_n \equiv 2 \pmod{3}$.

On a $10 \equiv 1 \pmod{3}$.

En élevant à la puissance n les deux membres de la dernière congruence, on obtient $10^n \equiv 1^n \pmod{3}$ soit $10^n \equiv 1 \pmod{3}$.

En ajoutant 1 à chaque membre de cette dernière congruence, on obtient $10^n+1 \equiv 2 \pmod{3}$ soit $a_n \equiv 2 \pmod{3}$.

Quelle est l'image de a_n par f ? 10^n

Comme $a_n \equiv 2 \pmod{3}$, a_n n'est pas divisible par 3 donc $f(a_n)=a_n-1=10^n$.

Écrire le(s) antécédent(s) de a_n par f. $3\times(10^n+1)$

On cherche les entiers relatifs x tels que $f(x)=a_n$.

On distingue deux cas selon que x est divisible par 3 ou non.

Si x est divisible par 3, alors $f(x)=\frac{x}{3}$. On trouve $x=3a_n$ qui convient bien.

Si x n'est pas divisible par 3, alors $f(x)=x-1$. On trouve $x=a_n+1$ qui ne convient pas car a_n+1 est divisible par 3 puisque $a_n+1 \equiv 3 \pmod{3}$ soit $a_n+1 \equiv 0 \pmod{3}$.

On a donc un seul antécédent de a_n par f : $3a_n=3\times(10^n+1)$.

IV.

Compléter la fonction Python `mult(n)` qui prend pour argument un entier naturel n supérieur ou égal à 1 et qui renvoie la liste des n premiers entiers naturels multiples de 3.

```
def mult(n):

    L=[3*k for k in range(0,n)]

    return L
```

```python
def mult(n):
    L=[3*k for k in range(n)]
    return L
```

```python
def mult(n):
    L=[k for k in range(0,3*n,3)]
    return L
```

On obtient en sortie les multiples $0=3\times0$, $3=3\times1$, $6=3\times2$, … $3(n-1)$.
On a ainsi bien les *n* premiers multiples de 3 positifs ou nuls (entiers naturels).

V.

1°) On pose $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Compléter l'égalité : $A^{2022}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On applique la propriété sur les puissances d'une matrice diagonale.

$$A^{2022}=\begin{pmatrix} i^{2022} & 0 \\ 0 & i^{2022} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$i^{2022}=i^{2020}\times i^2=1\times(-1)=-1$ ($i^{2020}=1$ car $i^4=1$ et 2020 est un multiple de 4)

On peut noter que la calculatrice permet de calculer directement i^{2022}.

2°) On pose $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Compléter l'égalité : $B^2=\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.
On peut écrire $B^2=16\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou encore $B^2=16I_2$.

Compléter alors, pour *n* entier naturel quelconque, l'égalité $B^{2n}=\begin{pmatrix} 16^n & 0 \\ 0 & 16^n \end{pmatrix}$ puis $B^{2n+1}=\begin{pmatrix} 4\times16^n & 0 \\ 3\times16^n & -4\times16^n \end{pmatrix}$.

$$B^{2n}=\left(B^2\right)^n=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}16^n & 0\\ 0 & 16^n\end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire $B^{2n}=\begin{pmatrix}4^{2n} & 0\\ 0 & 4^{2n}\end{pmatrix}$

On peut aussi écrire $B^{2n}=16^n I_2$.

$$B^{2n+1}=B^{2n}\times B=\begin{pmatrix}16^n & 0\\ 0 & 16^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 16^n & 0\\ 3\times 16^n & -4\times 16^n\end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire $B^{2n+1}=\begin{pmatrix}4^{2n+1} & 0\\ 3\times 4^{2n} & -4^{2n+1}\end{pmatrix}$.

VI.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère la matrice A carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1°) Calculer A^2 au brouillon et compléter l'égalité $A^2=nA$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n & n & \cdots & n\\ n & n & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & n\\ n & \cdots & n & n\end{pmatrix}$$

A^2 est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à n.

On peut mettre n en facteur ce qui permet d'écrire l'égalité $A^2=nA$.

2°) Soit U un vecteur colonne à n lignes tel que tous les coefficients sont nuls sauf deux, l'un égal à 1 et l'autre à – 1.
Calculer AU.

$$AU=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

AU est le vecteur colonne à n lignes dont tous les coefficients sont égaux à 0.

On peut prendre un exemple de vecteur colonne U pour comprendre, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On observe aisément que le résultat ne dépend pas de la place du 1 et du – 1.

Avant d'effectuer le produit, on s'intéresse aux formats des matrices.

La matrice A a pour format $n \times n$ et la matrice U a pour format $n \times 1$ donc la matrice AU a pour format $n \times 1$.

On peut résumer ceci en écrivant :

A : $n \times n$ U : $n \times 1$ AU : $n \times 1$

L'égalité $\text{AU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ permet d'en déduire que la matrice A n'est pas inversible.