**T spé**

# Interrogation écrite du vendredi 18 février 2022 (30 minutes)

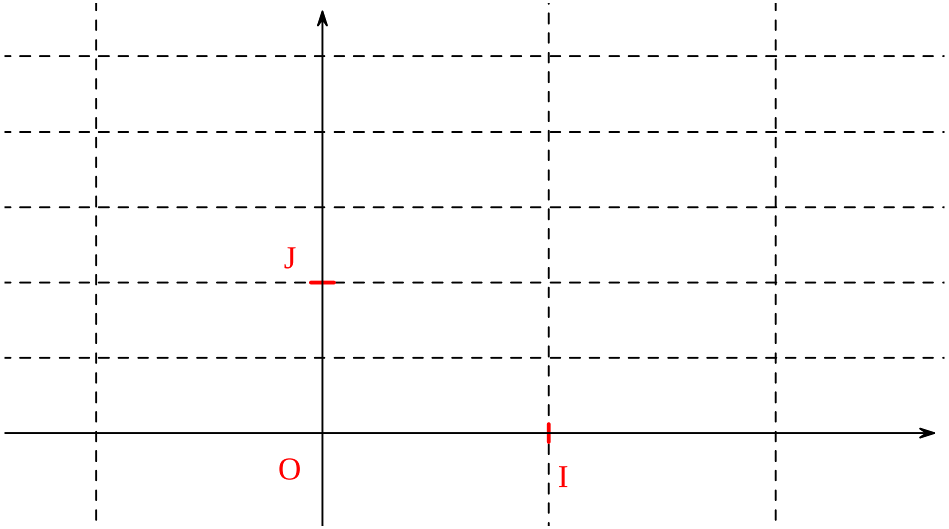
## I. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2^{\mathrm{E}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de $f(x)$ pour $x \in [-1\,;0[$.

……………………………………………………………………………………………

Tracer sans justifier, avec le plus grand soin, la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $[-1\,;2[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.




$f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

Répondre par oui ou non sans justifier.

….

## II. (2 points)

Écrire l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{E}(4x) = 3$.

…………… (une seule réponse, sans égalité)

## III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points + 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Quel est le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

Le tableau de variations de $f$ n'est pas demandé.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [-2\,;-1]$.

Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

On note $\alpha$ la solution de $(\mathrm{E})$ dans $I$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\alpha$.

……………………..

**IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)**

L'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1°) Déterminer les coordonnées du centre $\Omega$ et le rayon de la sphère $S$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-5=0$.

…………… ………

2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $\mathrm{A}(3\,;4\,;2)$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$).

…………….

**V. (4 points)**

On considère l'équation différentielle $2y'-y=1-x^2$ $(\mathrm{E})$.

Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que la fonction $u : x \mapsto ax^2+bx+c$ soit une solution de $(\mathrm{E})$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

**Prénom :** ……………………………………

**Numéro :** ………

**Nom :** …………………………………………

# Corrigé de l'interrogation écrite du 18-2-2022

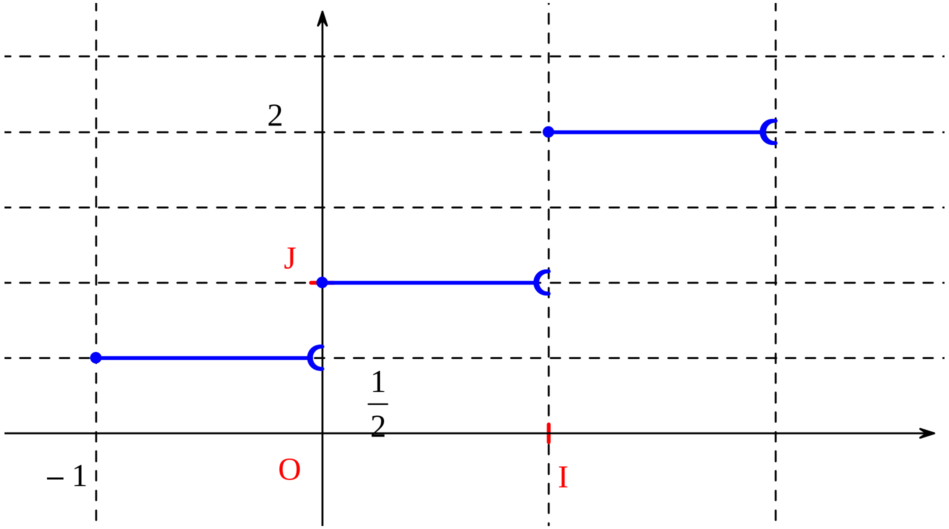
## I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2^{\mathrm{E}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de $f(x)$ pour $x \in [-1\,;0[$.

$\forall x \in [-1\,;0[ \quad \mathrm{E}(x) = -1$ donc $\forall x \in [-1\,;0[ \quad f(x) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

Tracer sans justifier, avec le plus grand soin, la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $[-1\,;2[$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.




- $\forall x \in [0\,;1[ \quad \mathrm{E}(x) = 0$ donc $\forall x \in [0\,;1[ \quad f(x) = 2^0 = 1$.
- $\forall x \in [1\,;2[ \quad \mathrm{E}(x) = 1$ donc $\forall x \in [1\,;2[ \quad f(x) = 2^1 = 2$.

On vérifie le tracé grâce à la calculatrice en rentrant la fonction $f$ (l'expression est notée $2^{\lfloor x \rfloor}$).

On fait attention aux points d'arrêt.

La représentation graphique de $f$ est constituée de segments de droites horizontaux fermés à gauche et ouverts à droite.

$f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

Répondre par oui ou non sans justifier.

non

---

## II.

Écrire l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{E}(4x) = 3$.

$$\left[\frac{3}{4}\,;1\right[ \quad \text{(une seule réponse, sans égalité)}$$

On résout l'équation $\mathrm{E}(4x) = 3 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 3 \leqslant 4x < 4$ (par définition de la partie entière d'un réel)

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4} \leqslant x < 1$ (on divise par 4 les deux membres de l'inégalité précédente ; 4 est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas)

---

## III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Quel est le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

Le tableau de variations de $f$ n'est pas demandé.

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$

On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi dire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [-2\,;-1]$.
Rédiger avec le plus grand soin selon le modèle étudié.

$C_1$ : $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle $I$.

$C_2$ : On a $f(-2) = \mathrm{e}^{-2} - 2 + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2} - 1$ et $f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$f(-2)$ est strictement négatif (on peut utiliser la calculatrice ou faire un calcul mental en prenant 2,7 pour valeur approchée de e) et $f(-1)$ est strictement positif de manière évidente car e est un réel strictement positif.
0 est donc compris entre $f(-2)$ et $f(-1)$.

$C_3$ : $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc par restriction, sur $I$.

$f$ vérifie les conditions $C_1$, $C_2$, $C_3$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $(\mathrm{E})$ admet une unique solution dans $I$.

On note $\alpha$ la solution de $(\mathrm{E})$ dans $I$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de $\alpha$.

$-1,278$

**IV.**

L'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Déterminer les coordonnées du centre $\Omega$ et le rayon de la sphère $S$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$.

$(1\,;-2\,;1)$ $\qquad$ $\sqrt{11}$

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M} \in S \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 5 = 0$

$\iff x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 2z - 5 = 0$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré $x^2 - 2x$, $y^2 + 4y$ et $z^2 - 2z$)

$\iff (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 - 5 = 0$

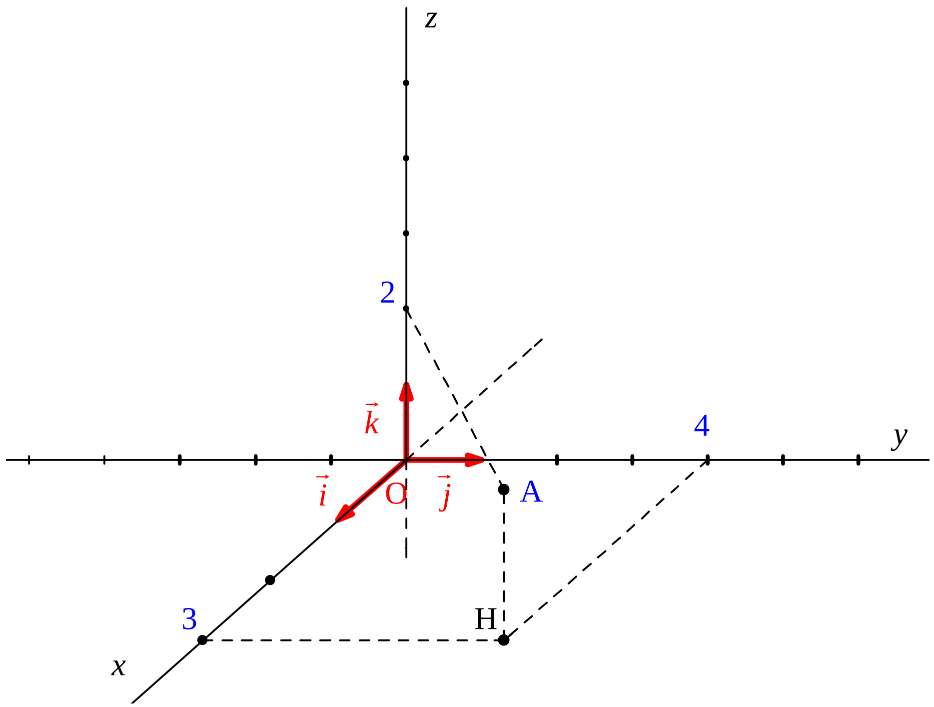
$\iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 - 11 = 0$

$\iff (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 11$

On en déduit que $S$ est la sphère de centre $\Omega(1\,;-2\,;1)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $\mathrm{A}(3\,;4\,;2)$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$).

$(3\,;4\,;0)$




Il s'agit d'une propriété du cours évidente comme on peut le visualiser sur un graphique.

---

**V.**

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 1 - x^2$ $(\mathrm{E})$.

Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que la fonction $u : x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit une solution de $(\mathrm{E})$.

$u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = 2ax + b$

On rédige ensuite en utilisant une chaîne d'équivalences.

$u$ est solution de $(\mathrm{E})$ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 2u'(x) - u(x) = 1 - x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 2(2ax+b) - (ax^2 + bx + c) = 1 - x^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad -ax^2 + (4a-b)x + 2b - c = 1 - x^2$

(on a développé et regroupé les termes semblables)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - c = 1 \end{cases}$$ (car $1 - x^2 = -1x^2 + 0x + 1$ ; on identifie les coefficients*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

* Théorème d'égalité de deux polynômes :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

La fonction $u$ définie par $u(x) = x^2 + 4x + 7$ est une solution particulière de $(\mathrm{E})$.

C'est la seule fonction polynomiale du second degré solution de $(\mathrm{E})$.

En utilisant la démarche habituelle, on peut démontrer que les solutions de $(\mathrm{E})$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x^2 + 4x + 7$ $(k \in \mathbb{R})$.